

文章编号: 0451-0712(2005)06-0064-06

中图分类号: U412

文献标识码: B

# 缓和复曲线(卵型曲线)中插缓和曲线特性的研究

宣道光

(浙江沪杭甬高速公路股份有限公司 杭州市 310007)

**摘 要:**《公路路线设计规范》(JTJ 011-94)及《公路设计手册(路线)》是公路路线线形设计的规范性文件,依据缓和复曲线(卵型曲线)的基本原理,导出了与其特性直接相关的公式,并与规范对比提出了分析意见,可供设计、测量部门参考。

**关键词:** 缓和复曲线; 卵型曲线; 中插缓和曲线; 座标; 卵型曲线参数; 弧长方程

公路缓和复曲线(卵型曲线)可定义为同向的 2 个不同半径圆曲线间,中插缓和曲线(回旋曲线)的公路线形。《公路路线设计规范》(JTJ 011-94)(以下简称《规范》)则将此种用 1 个回旋曲线连接 2 个同向圆曲线的线形组合称之为卵型曲线。《规范》给出了卵型曲线参数宜适用的 3 个条件。

条件(1):

$$\frac{R_2}{2} \leq A \leq R_2$$

式中:  $A$  为回旋曲线参数,  $m$ ;  $R_2$  为小圆的圆曲线半径,  $m$ 。

条件(2):

$$0.2 \leq \frac{1}{K} \leq 0.8$$

式中:  $K = \frac{R_1}{R_2}$ ;  $R_1$  为大圆的圆曲线半径,  $m$ 。

条件(3):

$$0.003 \leq \frac{D}{R_2} \leq 0.03$$

式中:  $D$  为 2 个圆曲线间的最小圆弧距,  $m$ 。

近年来,随着我国高速公路、铁路和城市立交互通工程的快速发展,通常在道路互通立交工程、地铁工程和曲线桥梁工程设计时,往往因受地形多变的地理条件限制,以及保护生态环境、节约建设用地等原因,会较多地选择曲线曲率变化连续匀称的缓和复曲线。

实际的互通立交工程设计中,经常还会碰到很难全部或部分满足《规范》建议的参数适用条件的情况。如本文所列的示例中除示例(1)外,示例(2)仅能满足条件(2)的范围,但不能满足条件(1)和条件(3);而示例(3)、(4)、(5)对《规范》所列条件均不能满足。

此外,《公路设计手册(路线)》(以下简称《手册》)对于卵型曲线中插缓和曲线计算的复杂性,经公式推导及推论,给出了缓和复曲线(卵型曲线)中插缓和曲线如下的 4 个特性,以利设计者应用:

(1)缓和曲线 2 个端点的曲线半径分别与相应的圆曲线半径一致;

(2)小半径圆曲线对于大半径圆曲线内移一定距离;

(3)以缓和曲线长度的 1/2 分别插入 2 个圆曲线间;

(4)缓和曲线中点通过内移距离的中点。

特性(1)和(2)显然是完全正确的,其理由是:特性(1)根据中插缓和曲线的定义,如图 1 所示,中插缓和曲线 2 个端点  $F$ 、 $M$  作为接入到 2 条相邻圆曲线的连接点,必将分别在  $F$  与  $M$  处与 2 条圆曲线密切,  $F$ 、 $M$  又可称为密切点(密切是微分几何关于空间曲线连接关系的几何特征,即不同曲率半径的空间曲线在某一点密切,其通过该密切点的曲线必重合且曲率半径相等);特性(2)则是在特性(1)基础上的必然推论,这是因为回旋型缓和曲线在几何特征

上, 表现为曲率半径是向内逐步收缩的曲线线形。

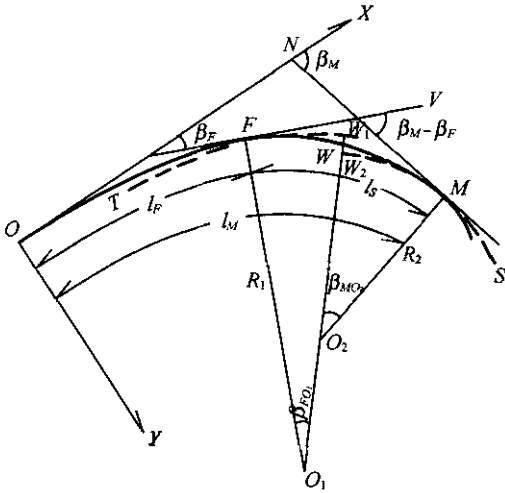


图 1 卵型曲线

1 公式推导

1.1 《手册》中特性(3)不能成立的理由

如图(1)所示,  $\widehat{OFWM}$  为 1 个缓和复曲线,  $O, F, M$  点的曲率半径分别为  $\infty, R_1, R_2$ , 各点的切线分别为  $\widehat{ON}, \widehat{FV}, \widehat{MN}$ ;  $\widehat{TFW_1}, \widehat{W_2MS}$  分别为大圆  $R_1$  和小圆  $R_2$  的圆曲线, 并分别在  $F$  点和  $M$  点与缓和复曲线  $\widehat{OFWM}$  公切。现令缓和复曲线  $\widehat{OFWM}$  中  $\widehat{OF}$  的弧长为  $l_F$ ,  $\widehat{OM}$  的弧长为  $l_M$ 、中插缓和曲线  $\widehat{FM}$  的弧长为  $l_S$ , 有  $l_S = l_M - l_F$ 。

由缓和复曲线的特性, 并令  $A$  为缓和回旋曲线参数,  $K = \frac{R_1}{R_2}$ , 则有:

$$l_S = A^2 \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{A^2 (K - 1)}{R_1} \tag{1}$$

$$l_F = \frac{A^2}{R_1} = \frac{l_S R_2}{R_1 - R_2} = \frac{l_S}{K - 1} \tag{2}$$

$$l_M = \frac{A^2}{R_2} = \frac{l_S R_1}{R_1 - R_2} = \frac{l_S K}{K - 1} \tag{3}$$

由图 1 所示的几何关系有:

$$\beta_M - \beta_F = \beta_{FO_1} + \beta_{MO_2}$$

式中:  $\beta_F, \beta_M$  分别为过  $F, M$  公切点的切线与过缓和复曲线起点  $O$  的切线间的交角;  $\beta_{FO_1}, \beta_{MO_2}$  则为  $O_1 F$  与  $O_2 M$  分别与  $O_1 O_2$  连心线间的夹角。

且有:

$$\beta_F = \frac{l_F}{2R_1} = \frac{l_S R_2}{2R_1(R_1 - R_2)} = \frac{l_S}{2R_1(K - 1)} \tag{4}$$

$$\beta_M = \frac{l_M}{2R_2} = \frac{l_S R_1}{2R_2(R_1 - R_2)} = \frac{l_S K}{2R_2(K - 1)} \tag{5}$$

$$\beta_{FO_1} = \frac{L_{FW_1}}{R_1} \tag{6}$$

$$\beta_{FO_1} = \frac{L_{MW_2}}{R_2} \tag{7}$$

现将式(4)、(5)、(6)和(7)代入公式  $\beta_M - \beta_F = \beta_{FO_1} + \beta_{MO_2}$ , 则得:

$$\frac{l_S}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{L_{FW_1}}{R_1} + \frac{L_{MW_2}}{R_2} \tag{8}$$

进而得:

$$L_{FW_1} + K L_{MW_2} = \frac{l_S}{2} (K + 1) \tag{9}$$

式(8)或式(9)即为关于圆弧  $L_{FW_1}$  和  $L_{MW_2}$  弧长的二元一次方程。为求得  $L_{FW_1}$  和  $L_{MW_2}$  弧长在实数范围内的唯一确定解, 则必需还应有一个关于  $f(L_{FW_1}, L_{MW_2}) = 0$  的方程, 与式(8)或式(9)联立后组成二元一次方程组。《手册》仅根据式(8)就得出  $L_{FW_1} = L_{FW_1} = L_{MW_2} = L_{MW_2} = \frac{l_S}{2}$  的结论, 并由此推论(本文略)得  $W_1 W = W_2 W$  (特性 4)。本文作者认为上述结论并不成立, 且是错误的。

1.2 本文建议公式的推导

如图 2 所示, 把 2 个圆曲线与回旋型缓和曲线一起纳入  $XOY$  坐标系中, 回旋型缓和曲线的起点  $O$  为坐标系的原点, 以回旋型缓和曲线过点  $O$  的切线为  $X$  轴。根据曲率半径重合且相等的密切原理, 回旋型缓和曲线在  $F$  点与  $M$  点的曲率半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ 。根据文献[3]给出的  $O_1(x_{O_1}, y_{O_1})$  和  $O_2(x_{O_2}, y_{O_2})$

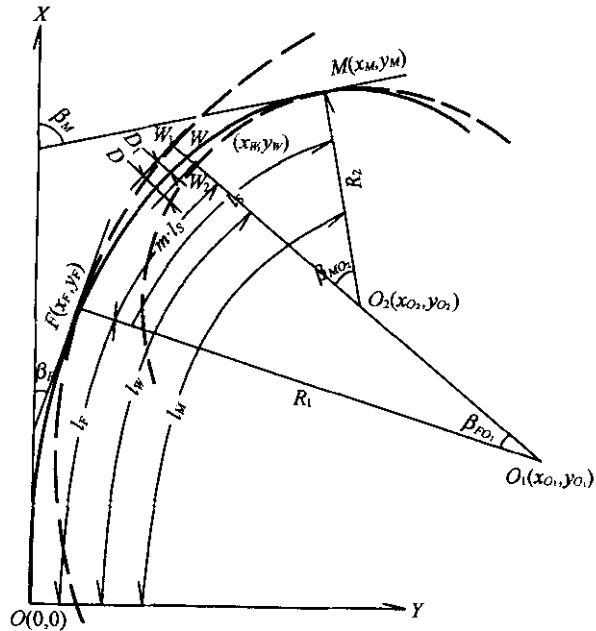


图 2 卵型曲线计算示意

圆心坐标公式,以及根据较为精确的缓和曲线公式(本文取前 4 项缓和曲线的级数展开式,以求能与圆心坐标公式的取项保持一致)。图 2 所示的缓和曲线  $F$ 、 $W$  点的坐标分别为  $(x_F, y_F)$  与  $(x_W, y_W)$ 。上述各点的坐标公式,经整理可表述如下:

$$x_{O_1} = \frac{R_2 l_M}{2R_1} - \frac{R_2^3 l_M^3}{240R_1^5} + \frac{R_2^5 l_M^5}{34\,560R_1^9} - \frac{R_2^7 l_M^7}{8\,386\,560R_1^{13}} \quad (10)$$

$$y_{O_1} = \frac{R_2^2 l_M^2}{24R_1^3} - \frac{R_2^4 l_M^4}{2\,688R_1^7} + \frac{R_2^6 l_M^6}{506\,880R_1^{11}} - \frac{R_2^8 l_M^8}{154\,828\,800R_1^{15}} + R_1 \quad (11)$$

$$x_{O_2} = \frac{l_M}{2} - \frac{l_M^3}{240R_2^2} + \frac{l_M^5}{34\,560R_2^4} - \frac{l_M^7}{8\,386\,560R_2^6} \quad (12)$$

$$y_{O_2} = \frac{l_M^2}{24R_2} - \frac{l_M^4}{2\,688R_2^3} + \frac{l_M^6}{506\,880R_2^5} - \frac{l_M^8}{154\,828\,800R_2^7} + R_2 \quad (13)$$

$$x_F = l_F - \frac{l_F^3}{40R_1^2} + \frac{l_F^5}{3\,456R_1^4} - \frac{l_F^7}{599\,040R_1^6} \quad (14)$$

$$y_F = \frac{l_F^2}{6R_1} - \frac{l_F^4}{336R_1^3} + \frac{l_F^6}{42\,240R_1^5} - \frac{l_F^8}{9\,676\,800R_1^7} \quad (15)$$

$$x_W = l_W - \frac{l_W^5}{40R_2^2 l_M^2} + \frac{l_W^9}{3\,456R_2^4 l_M^4} - \frac{l_W^{13}}{599\,040R_2^6 l_M^6} \quad (16)$$

$$y_W = \frac{l_W^3}{6R_2 l_M} - \frac{l_W^7}{336R_2^3 l_M^3} + \frac{l_W^{11}}{42\,240R_2^5 l_M^5} - \frac{l_W^{15}}{9\,676\,800R_2^7 l_M^7} \quad (17)$$

图 2 中,由  $O_1W$  与  $O_2W$  这 2 个直线段斜率相等得:

$$\frac{x_{O_1} - x_W}{y_{O_1} - y_W} = \frac{x_{O_2} - x_W}{y_{O_2} - y_W} \quad (18)$$

式(18)经整理化简后得:

$$x_W(y_{O_1} - y_{O_2}) + y_W(x_{O_2} - x_{O_1}) - (x_{O_2}y_{O_1} - x_{O_1}y_{O_2}) = 0 \quad (19)$$

将式(2)、(3)、(10)、(11)、(12)、(13)、(16)和(17)分别代入式(19),经整理化简后可求得关于圆心连线  $O_1O_2$  的延长线与缓和曲线的交点  $W$  至缓和曲线起点  $O$  的弧长  $l_W$  的高次方程。并进而求得  $l_W$  的在设立误差  $Q$  范围内的唯一精确解,并由此求得参数  $m = \frac{l_W - l_F}{l_M - l_F}$  的精确值。

即有:

$$\begin{aligned} & x_W(y_{O_1} - y_{O_2}) + y_W(x_{O_2} - x_{O_1}) = \\ & l_W \left[ \frac{R_1(K-1)}{K} - \frac{l_S^2(K^3-1)}{24(K-1)^2 R_1} + \frac{l_S^4(K^7-1) \times 10^{-3}}{2.688(K-1)^4 R_1^3} - \right. \\ & \left. \frac{l_S^6(K^{11}-1) \times 10^{-5}}{5.068\,8(K-1)^6 R_1^5} + \frac{l_S^8(K^{15}-1) \times 10^{-8}}{1.548\,288(K-1)^8 R_1^7} \right] + \\ & l_W^3 \left[ \frac{(K-1)}{12R_1} - \frac{l_S^2(K^5-1) \times 10^{-3}}{1.44(K-1)^2 R_1^3} + \right. \\ & \left. \frac{l_S^4(K^9-1) \times 10^{-5}}{2.073\,6(K-1)^4 R_1^5} - \frac{l_S^6(K^{13}-1) \times 10^{-8}}{1.006\,387\,2(K-1)^6 R_1^7} \right] - \\ & l_W^5 \left[ \frac{(K-1)^3}{40KR_1 l_S^2} - \frac{(K^3-1) \times 10^{-2}}{9.6R_1^3} + \right. \\ & \left. \frac{l_S^2(K^7-1) \times 10^{-5}}{1.075\,2(K-1)^2 R_1^5} - \frac{l_S^4(K^{11}-1) \times 10^{-7}}{2.027\,52(K-1)^4 R_1^7} + \right. \\ & \left. \frac{l_S^6(K^{15}-1) \times 10^{-9}}{6.193\,152(K-1)^6 R_1^9} \right] - \\ & l_W^7 \left[ \frac{(K-1)^3 \times 10^{-2}}{6.72R_1^3 l_S^2} - \frac{(K^5-1) \times 10^{-4}}{8.064R_1^5} + \right. \\ & \left. \frac{l_S^2(K^9-1) \times 10^{-7}}{1.161\,216(K-1)^2 R_1^7} - \frac{l_S^4(K^{13}-1) \times 10^{-9}}{2.817\,884\,16(K-1)^4 R_1^9} \right] + \\ & l_W^9 \left[ \frac{(K-1)^5 \times 10^{-3}}{3.456KR_1 l_S^4} - \frac{(K-1)^2(K^3-1) \times 10^{-4}}{8.294\,4R_1^2 l_S^2} + \right. \\ & \left. \frac{(K^7-1) \times 10^{-6}}{9.289\,728R_1^7} - \frac{l_S^2(K^{11}-1) \times 10^{-9}}{1.751\,777\,28(K-1)^2 R_1^9} + \right. \\ & \left. \frac{l_S^4(K^{15}-1) \times 10^{-11}}{5.350\,883\,328(K-1)^4 R_1^{11}} \right] + \\ & l_W^{11} \left[ \frac{(K-1)^5 \times 10^{-4}}{8.448R_1^5 l_S^4} - \frac{(K-1)^2(K^5-1) \times 10^{-7}}{1.013\,76R_1^7 l_S^2} + \right. \\ & \left. \frac{(K^9-1) \times 10^{-9}}{1.459\,814\,4R_1^9} - \frac{l_S^2(K^{13}-1) \times 10^{-9}}{3.542\,482\,944(K-1)^2 R_1^{11}} \right] - \\ & l_W^{13} \left[ \frac{(K-1)^7 \times 10^{-5}}{5.990\,4KR_1 l_S^6} - \frac{(K-1)^4(K^3-1) \times 10^{-7}}{1.437\,696R_1^7 l_S^4} + \right. \\ & \left. \frac{(K-1)^2(K^7-1) \times 10^{-9}}{1.610\,219\,52R_1^9 l_S^2} - \frac{(K^{11}-1) \times 10^{-11}}{3.036\,413\,952R_1^{11}} + \right. \\ & \left. \frac{l_S^2(K^{15}-1) \times 10^{-13}}{9.274\,864\,435(K-1)^2 R_1^{13}} \right] - \\ & l_W^{15} \left[ \frac{(K-1)^7 \times 10^{-7}}{1.935\,36R_1^7 l_S^6} - \frac{(K-1)^4(K^5-1) \times 10^{-9}}{2.322\,432R_1^9 l_S^4} + \right. \\ & \left. \frac{(K-1)^2(K^9-1) \times 10^{-11}}{3.344\,302\,08R_1^{11} l_S^2} - \frac{(K^{13}-1) \times 10^{-13}}{8.115\,506\,381R_1^{13}} \right] \end{aligned}$$

经本文示例计算及实体工程设计实例计算均表明,略去算式中的高阶无穷小量项,即仅取前 3 项,已能满足工程设计精度(本文  $Q=0.000\,1$ )的要求,故有:

$$\begin{aligned} & x_W(y_{O_1} - y_{O_2}) + y_W(x_{O_2} - x_{O_1}) \\ & = l_W \left[ \frac{R_1(K-1)}{K} - \frac{l_S^2(K^3-1)}{24(K-1)^2 R_1} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{l_s^4(K^7-1) \times 10^{-3}}{2.688(K-1)^4 R_1^3} - \frac{l_s^6(K^{11}-1) \times 10^{-5}}{5.0688(K-1)^6 R_1^5} + \\ & \frac{l_s^8(K^{15}-1) \times 10^{-8}}{1.548288(K-1)^8 R_1^7} \Big] + \\ & l_w^3 \Big[ \frac{(K-1)}{12R_1} - \frac{l_s^3(K^5-1) \times 10^{-3}}{1.44(K-1)^2 R_1^3} + \\ & \frac{l_s^4(K^9-1) \times 10^{-5}}{2.0736(K-1)^4 R_1^5} - \frac{l_s^6(K^{13}-1) \times 10^{-8}}{1.0063872(K-1)^6 R_1^7} \Big] - \\ & l_w^5 \Big[ \frac{(K-1)^3}{40KR_1 l_s^2} - \frac{(K^3-1) \times 10^{-2}}{9.6R_1^3} + \\ & \frac{l_s^2(K^7-1) \times 10^{-5}}{1.0752(K-1)^2 R_1^5} - \frac{l_s^4(K^{11}-1) \times 10^{-7}}{2.02752(K-1)^4 R_1^7} + \\ & \frac{l_s^6(K^{15}-1) \times 10^{-9}}{6.193152(K-1)^6 R_1^9} \Big] \end{aligned}$$

又:

$$\begin{aligned} & x_{o_2}y_{o_1} - x_{o_1}y_{o_2} \\ & = \frac{(K^2-1)R_1 l_s}{2K(K-1)} - \\ & \frac{l_s^3 10^{-2}}{2.4K(K-1)^3 R_1} \times [5K^2(K^2-1) + (K^6-1)] - \\ & \frac{l_s^5 \times 10^{-5}}{2.4192K(K-1)^5 R_1^3} \times \\ & [42K^4(K^2-1) - 45K^2(K^6-1) - 7(K^{10}-1)] - \\ & \frac{l_s^7 \times 10^{-8}}{8.3026944K(K-1)^7 R_1^5} \times \\ & [1287K^6(K^2-1) - 1001K^4(K^6-1) + \\ & 819K^2(K^{10}-1) + 99(K^{14}-1)] - \\ & \frac{K l_s^9 \times 10^{-11}}{1.328431104(K-1)^9 R_1^7} \times \\ & [1430K^6(K^2-1) - 1092K^4(K^6-1) + \\ & 660K^2(K^{10}-1) - 429(K^{14}-1)] - \\ & \frac{K^5 l_s^{11} \times 10^{-14}}{1.115882127(K-1)^{11} R_1^9} \times \\ & [6370K^4(K^2-1) - 4950K^2(K^6-1) + \\ & 3003(K^{10}-1)] - \\ & \frac{K^9 l_s^{13} \times 10^{-14}}{7.651763159(K-1)^{13} R_1^{11}} \times \\ & [180K^2(K^2-1) - 143(K^6-1)] - \\ & \frac{K^{13}(K^2-1) l_s^{15} \times 10^{-15}}{1.298481021(K-1)^{15} R_1^{13}} \end{aligned}$$

现今:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{R_1(K-1)}{K} - \frac{l_s^2(K^3-1)}{24(K-1)^2 R_1} + \\ & \frac{l_s^4(K^7-1) \times 10^{-3}}{2.688(K-1)^4 R_1^3} - \frac{l_s^6(K^{11}-1) \times 10^{-5}}{5.0688(K-1)^6 R_1^5} + \\ & \frac{l_s^8(K^{15}-1) \times 10^{-8}}{1.548288(K-1)^8 R_1^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(K-1)}{12R_1} - \frac{l_s^3(K^5-1) \times 10^{-3}}{1.44(K-1)^2 R_1^3} + \\ & \frac{l_s^4(K^9-1) \times 10^{-5}}{2.0736(K-1)^4 R_1^5} - \frac{l_s^6(K^{13}-1) \times 10^{-8}}{1.0063872(K-1)^6 R_1^7} \\ C &= \frac{(K-1)^3}{40KR_1 l_s^2} - \frac{(K^3-1) \times 10^{-2}}{9.6R_1^3} + \\ & \frac{l_s^2(K^7-1) \times 10^{-5}}{1.0752(K-1)^2 R_1^5} - \frac{l_s^4(K^{11}-1) \times 10^{-7}}{2.02752(K-1)^4 R_1^7} + \\ & \frac{l_s^6(K^{15}-1) \times 10^{-9}}{6.193152(K-1)^6 R_1^9} \end{aligned}$$

$$E = x_{o_2}y_{o_1} - x_{o_1}y_{o_2}$$

代入算式, 则得:

$$A_1 l_w + B l_w^3 - C l_w^5 - E = 0 \quad (20)$$

按式(20)并设立限制误差  $Q$  (本文  $Q = 1 \times 10^{-4}$ ), 即可求得  $l_w$  弧长(m), 具体步骤如下。

(1) 求  $l'_w$ :

$$l'_w = \frac{E}{A_1} \quad (21)$$

(2) 求  $d_k$ , 将式(21)的  $l'_w$  和  $A_1, B, C, E$  各系数代入式(20), 即有:

$$d_k = A_1 l'_w + B l'^3_w - C l'^5_w - E \quad (22)$$

若  $d_k > Q$  时, 再计算  $l''_w$ , 即:

$$l''_w = l'_w - \frac{d_k}{A_1} \quad (23)$$

重复按式(22)计算  $d_k$ , 按式(20)计算  $l_w$ , 直至所求  $d_k \leq Q$  时, 即可求得满足精度要求的  $l_w$ 。

现将由式(2)和式(20)求得的缓和复曲线  $l_F$  和  $l_W$  这 2 段弧长分别代入式(14)、(15)和式(16)、(17)中即求得  $F$  点和  $W$  点的坐标值为  $(x_F, y_F)$  和  $(x_W, y_W)$ , 并由此可求得:

$$\begin{aligned} D &= R_1 - R_2 - \left[ \sqrt{(x_{o_1} - x_W)^2 + (y_{o_1} - y_W)^2} - \right. \\ & \quad \left. \sqrt{(x_{o_2} - x_W)^2 + (y_{o_2} - y_W)^2} \right] \\ &= R_1 - R_2 - \sqrt{(x_{o_1} - x_{o_2})^2 + (y_{o_1} - y_{o_2})^2} \quad (24) \\ D_1 &= R_1 - \left[ \sqrt{(x_{o_1} - x_W)^2 + (y_{o_1} - y_W)^2} \right] = nD \end{aligned} \quad (25)$$

式中:  $D$  为 2 个圆曲线间的最小圆弧距, m;  $D_1$  为圆心连接线的延长线与大圆的交点  $W_1$  至  $W$  点间的距离, m;  $n$  为系数,  $n = \frac{D_1}{D}$ 。

并由图 1 的几何关系有:

$$\beta_{MO_2} = \beta_M - \beta_F - \beta_{FO_1} \quad (26)$$

现将以角度方式表达的式(4)、式(5)代入式(26), 经整理化简可得:

$$\beta_{MO_2}=\frac{l_s(KR_1-R_2)\times 90}{\pi(K-1)R_1R_2}-\beta_{FO_1}\tag{27}$$

由图 2 所示可有：

$$\beta_{FO_1}=\arctan\left|\frac{x_{O_1}-x_W}{y_{O_1}-y_W}\right|-\arctan\left|\frac{x_{O_1}-x_F}{y_{O_1}-y_F}\right|\tag{28}$$

又由式(6)、(7)和式(27)、(28),则可求得缓和曲线  $F$  点与  $W$  点间的 2 段圆曲线长度  $L_{FW_1}$ 、 $L_{MW_2}$ ：

$$L_{FW_1}=R_1\beta_{FO_1}\frac{\pi}{180}\tag{29}$$

$$L_{MW_2}=R_2\beta_{MO_2}\frac{\pi}{180}\tag{30}$$

进而得：  
$$L_{FW}=l_W-l_F=ml_s\tag{31}$$

式中： $m$  系数为缓和曲线  $F$  点至  $W$  点间的弧长与中插缓和曲线弧长  $L_{FW}$  之比， $m=\frac{l_W-l_F}{l_s}$ 。

本文所列示例(含 2 项工程实例)中,当已知大圆半径为  $R_1$ 、小圆半径为  $R_2$  以及中插回旋型缓和曲线参数为  $A$  时,则可按式(1)至式(31)所列公式求得缓和复曲线(卵型曲线)中插缓和曲线各相关的参数,见表 1。

表 1 缓和复曲线(卵型曲线)中插缓和曲线有关计算数值

项目		示例 1	示例 2(工程实例)	示例 3	示例 4	示例 5(工程实例)
$A/\text{m}$		200	120	900	120	85.003 6
$R_1/\text{m}$		1 000	220	5 000	700	2 300
$R_2/\text{m}$		200	62.55	600	70	60
$K=\frac{R_1}{R_2}$		5	3.517 2	8.333 3	10	38.333 3
缓和复曲线 (卵型曲线)中插缓和曲线参数	$l_s/\text{m}$	160	164.761 2	1 188	185.142 9	117.286 0
	$l_W/\text{m}$	119.665 7	145.386 8	740.635 1	108.785 6	60.245 5
	$x_W/\text{m}$	119.282 8	137.748 3	732.188 4	106.963 0	59.866 6
	$y_W/\text{m}$	7.123 7	34.222 9	82.912 2	14.721 7	5.021 0
	$x_{O_1}/\text{m}$	19.999 7	32.703 1	80.999 3	10.285 6	1.570 8
	$y_{O_1}/\text{m}$	1 000.066 7	220.810 8	5 000.218 7	700.025 2	2 300.000 2
	$x_{O_2}/\text{m}$	99.172 4	103.268 1	647.503 6	95.882 7	58.247 7
	$y_{O_2}/\text{m}$	208.259 3	93.877 8	720.992 9	93.333 6	69.716 7
	$x_F/\text{m}$	39.998 4	65.309 8	161.995 7	20.571 0	3.141 6
$y_F/\text{m}$		0.266 7	3.240 6	0.874 8	0.100 8	0.000 7
$D/\text{m}$		4.244 3	12.227 2	83.438 8	17.299 8	8.997 5
$D/R_2$		0.021 2	0.195 5	0.139 1	0.247 1	0.150 0
$\beta_{FO_1}$		4°33′50.5″	20°51′19.0″	6°36′55.7″	7°11′16.7″	1°24′57.4″
$\beta_{MO_2}$		22°56′16.6″	76°03′36.7″	56°54′50.7″	76°09′35.5″	56°02′40.5″
$L_{FW_1}+L_{MW_2}/\text{m}$		159.726 0	163.113 8	1 173.312 4	180.864 3	115.529 7
$m$		0.497 9	0.485 1	0.487 1	0.476 5	0.486 9
$n$		0.496 1	0.480 5	0.476 6	0.457 3	0.475 8
$D_a/\text{m}$		4.24	—	83.44	17.30	—

注：(1) $D_a$  值从《城市道路设计手册》中的“卵型表”内查得<sup>[6]</sup>；(2)示例 2、示例 5 分别取自参考文献[4]和参考文献[3]中有关数值经计算而得。

2 结语

(1)本文示例计算结果经与《手册》建议采用值误差对比分析后表明(表 2):缓和复曲线(卵型曲线)无论是按符合《规范》宜适用的范围要求设定参数,还是按不符合或部分符合《规范》宜适用的范围要求设定参数值时,《手册》公式推导并采用的  $m=0.5$  和

$n=0.5$  均是错误的,也即实际上并不存在上述结论。当严格按《规范》要求宜适用的范围内设定参数值时,误差较小。计算结果表明: $m$  值误差约在 5% 以内; $n$  值误差稍大,约在 10% 以内。也因其误差较小,故长期以来被工程所接受并采用<sup>[5]</sup>。

但当工程实际需要很难符合《规范》宜适用的范

表 2 示例(含工程实例)与《手册》误差对比分析

项目	示例(含工程实例)计算值					《规范》宜适用范围	《手册》采用值
$R_2/\text{m}$	200	62.55	600	70	60	小圆的圆曲线半径(m)	
$A/\text{m}$	200	120	900	120	85.003 6	$\frac{R_2}{2} \leq A \leq R_2$	
$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{K}$	0.20	0.284 3	0.12	0.10	0.026	$0.2 \leq \frac{1}{K} \leq 0.8$	
$\frac{D}{R_2}$	0.021 2	0.195 5	0.139 1	0.247 1	0.15	$0.003 \leq \frac{D}{R_2} \leq 0.03$	
$m$	0.497 9	0.485 1	0.487 1	0.476 5	0.486 9		0.5
$\frac{m-0.5}{m}/\%$	-0.42	-3.07	-2.65	-4.93	-2.69		0
$n$	0.496 1	0.480 5	0.476 6	0.457 3	0.475 8		0.5
$\frac{n-0.5}{n}/\%$	-0.79	-4.06	-4.91	-9.33	-5.09		0
$l_S/\text{m}$	160	164.761 2	1 188	185.142 9	117.286 0		$L_{FW_1} + L_{MW_2}$
$L_{FW_1} + L_{MW_2}/\text{m}$	159.726 0	163.113 8	1 173.312 4	180.864 3	115.529 7		$l_S$
$L_{FW_1} + L_{MW_2} - l_S/\text{m}$	-0.274	-1.647 4	-14.687 6	-4.278 6	-1.756 3		0
$\frac{L_{FW_1} + L_{MW_2} - l_S}{L_{FW_1} + L_{MW_2}}/\%$	-0.17	-1.01	-1.25	-2.37	-1.52		0

围要求时,如本文 2 项工程实例均表明计算误差较大,甚至不能满足工程精度要求。本文所列示例表明: $m$  值的平均误差在 3% 以上,最大误差约为 5% 左右; $n$  的平均误差则在 5% 以上,最大误差为 9.33%。这对于工程精度要求较高的高速公路互通立交工程、隧道工程以及曲线桥梁工程显然是不能接受的。

(2) 本文示例计算结果还表明:《手册》结论认为缓和复曲线(卵型曲线)中插缓和曲线段的弧长等于其 2 个端点  $F$  和  $M$  间的大圆和小圆的圆弧长度之和,即  $l_S = L_{FW_1} + L_{MW_2}$ ,计算结果表明也不能成立,其相对误差约在  $-1\% \sim 3\%$  间,其误差绝对数值则更大。

(3) 计算数据经分析表明, $m$  值的相对误差随  $D/R_2$  值的增大而增大。

(4) 建议《规范》对缓和复曲线(卵型曲线)宜适用的范围应结合工程类别、线形技术标准予以适当

放宽。

(5) 本文示例计算结果经与文献[3]、[6]复核无误。

参考文献:

[1] JTJ 011-94,公路路线设计规范[S].

[2] 公路设计手册(路线)编写组.公路设计手册(路线)[M].北京:人民交通出版社,1979.

[3] 张坤宜,等.缓和复曲线中插缓和曲线弧长的直接精确解[J].公路,2004,(8).

[4] 覃芳铭.卵型曲线中间缓和曲线段的几个问题[J].华东公路,1997,(5).

[5] 吴国雄,李方.互通式立体交叉设计范例[M].北京:人民交通出版社,2002.

[6] 北京市市政设计院.城市道路设计手册[M].北京:中国建筑工业出版社,1985.