

刚接曲线梁桥荷载横向分布的计算模型

程翔云

(湖南大学土木工程学院 长沙市 410082)

摘 要: 借助于附加的水平刚臂单元,对曲线梁的弯-扭耦合效应进行了分离。这样,才有可能分别导出两类弹簧支承(竖向的和扭转的)的刚度计算公式。在此基础上,建立了能够应用电算程序来分析曲线梁桥荷载横向分布的计算模型。通过实例验证了该模型的正确性,并且这种方法可以大大地简化计算过程。

关键词: 刚接曲线梁桥; 荷载横向分布; 附加刚臂; 弯-扭耦合效应; 弹簧支承

为了建立刚接曲线梁桥荷载横向分布影响线的程序计算模型,必须先对曲线梁桥弯-扭耦合效应的特性做一简单介绍。

1 曲线梁弯-扭耦合效应的理论公式

文献[1,2]按照弹性理论,导出了简支超静定曲线梁在忽略翘曲惯矩前提下的弯扭微分方程,并且由此进一步推演出曲线梁在受半波正弦竖向荷载($\hat{q} \sin \frac{\pi z}{l}$)和扭矩荷载($\hat{m}_t \sin \frac{\pi z}{l}$)下的挠度峰值 \hat{w} 和扭角峰值 $\hat{\varphi}$ 计算公式,这些都为应用平面杆系有限元法程序直接确定出曲线梁桥荷载横向分布系数 m 奠定了基础,其具体表达式为:

$$\hat{w} = \frac{\hat{q} D - \hat{m}_t B}{\Delta} \quad (1)$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{m}_t A - \hat{q} B}{\Delta} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{GI_d}{R^4} \left[k \left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^4 + \left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 \right] \\ B &= \frac{GI_d}{R^3} (1+k) \left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 \\ D &= \frac{GI_d}{R^2} \left[k + \left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 \right] \\ \Delta &= AD - B^2, k = \frac{EI_x}{GI_d} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: E 、 G 分别为材料的弹性模量和剪切模量; I_x 、 I_d 分别为梁截面的抗弯惯矩和抗扭惯矩; R 、 θ_0 分别为曲线梁的半径和圆心角。

式中的符号规定: 当外弧线居左、曲率中心居右

时,竖向荷载及挠度均以向下为正,扭矩及扭角均以顺时针方向旋转者为正,反之为负。

2 计算模型

2.1 弹簧支承的设置

作者曾在文献[3,4]中,应用文献[5]中的刚接梁法原理和通过设置两类弹簧支承(竖向和抗扭),建立了对带悬臂板的连续板桥和简支 T 梁桥在分析荷载横向分布时的程序计算模型,达到了计算简便和精度较高的效果,如图 1 所示。其中的弹簧刚度 k_w (竖向)和 k_φ (抗扭,原著均写为 k_θ)均可按较简单的公式求得,这是因为直线梁桥中,不存在弯-扭耦合效应的缘故。然而,对于曲线梁桥就没有那么简单了。这从式(1)、式(2)中可以看出,无论是垂直荷载 q ,还是扭矩荷载 m_t 单独地作用,都会使曲线梁的跨中同时发生挠曲和扭角,因而也无法确定出每片曲线梁的弹簧刚度 k_w 和 k_φ ,如图 2(1)所示。不仅如此,当同样的荷载作用在不同的(外弧侧或内弧侧)单片曲线梁上时,它们产生的位移值也是不相等的,这就是所谓的弯-扭耦合效应。为了能够应用平面杆系有限元程序求解曲线梁桥荷载横向分布系数,在参考文献[3,4]后,作者做了这样的设想,即从单片曲线梁的跨中桥面中点 a 向曲率中心悬出一根单宽刚臂,其上总可以找到这样一个 b 点,它距 a 点的悬臂长为 e ,当在 b 点单宽上作用有分布垂直力 q 时,该片的跨中截面只产生均匀下挠 w ,而无扭角,即 $\varphi=0$,如图 2(2)所示。若将此力 q 移置到原来的 a 点处,则可等效为除力 q 外,

还有分布扭矩 $q \cdot e$ 。再将此二力代入式 (2)，令 $\varphi=0$ ，便有：

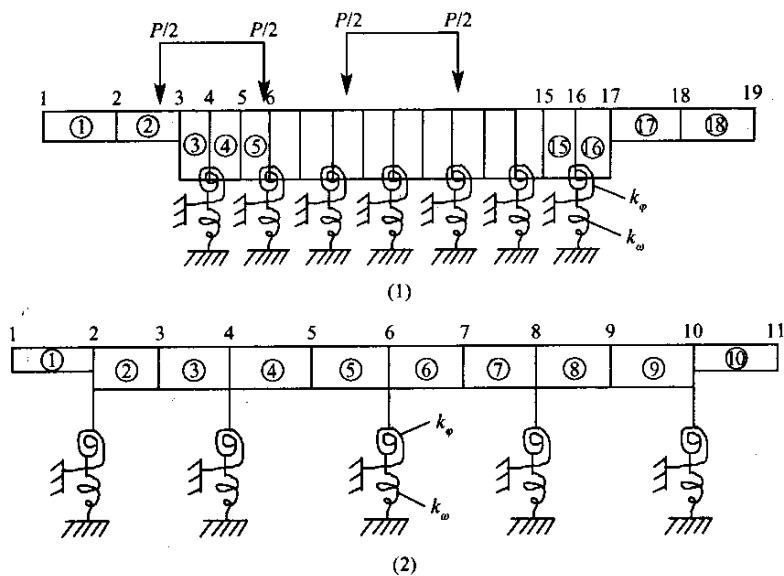
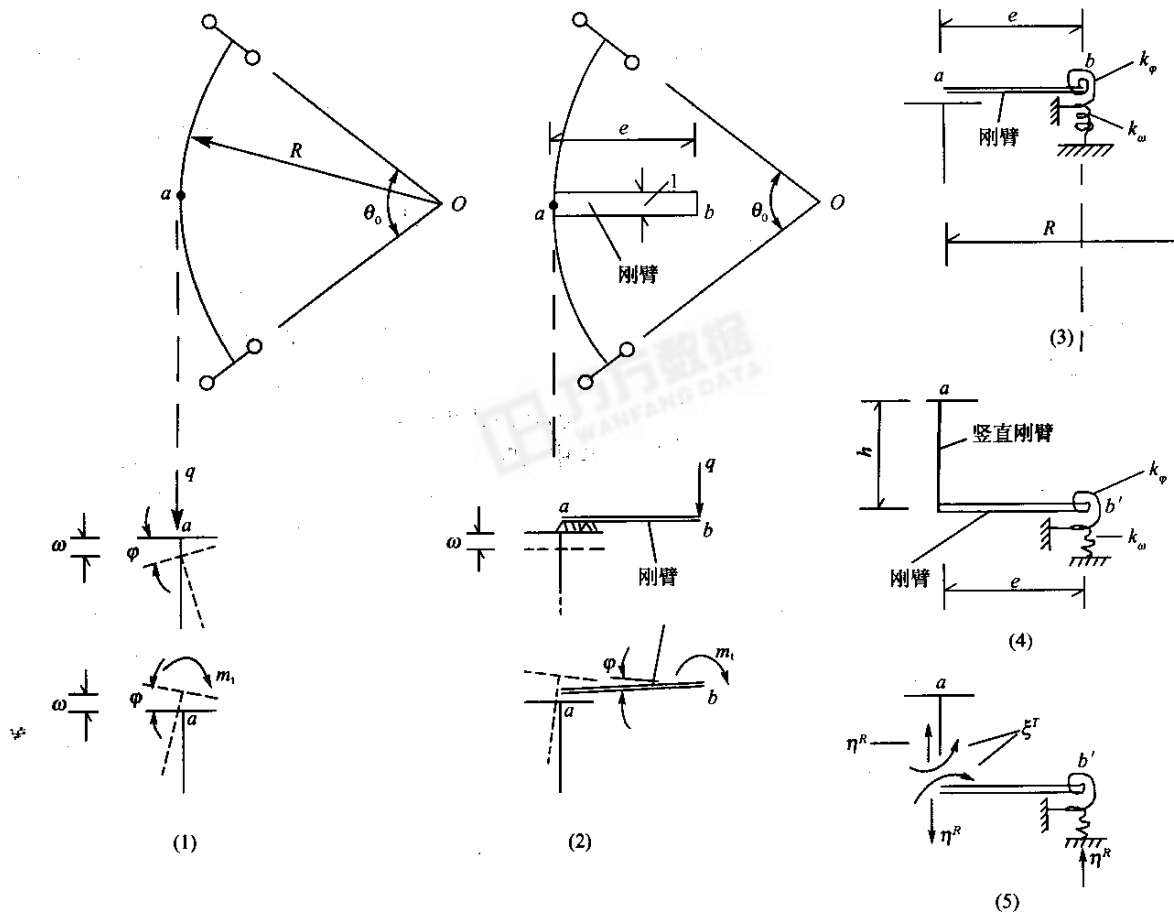


图 1 直线梁桥荷载横向分布的计算模型



$$e=\frac{B}{A} \tag{4}$$

继续将此二力及式(4)代入式(1), 便有:

$$w=\frac{q(D-B^2/A)}{\Delta}$$

由此可以求得一个假想的竖向弹簧支承刚度 k_w , 即:

$$k_w=\frac{q}{w}=\frac{\Delta}{D-\frac{B^2}{A}}=A \tag{5}$$

根据变位互等定理, 当在刚臂端点 b 只作用分布扭矩 m_t 时, 则 b 点不产生竖向位移, 而刚臂及桥面只产生绕 b 点的扭角 φ 。按照与上述相类似的推演和利用式(2), 同样地可以求得:

$$k_\varphi=\frac{m_t}{\varphi}=\frac{\Delta}{A} \tag{6}$$

按上式求出的 k_φ 便是另一个假想的抗扭弹簧支承刚度。这里要说明的是, 这样的一对弹簧支承不是像直线梁桥一样, 位于桥面中心点 a , 而是位于内弧侧, 距 a 点的水平距离为 e 的 b 点处, 如图 2(3)所示。但是为了避免混淆, 使离散图更清晰, 可以将假想的单宽刚臂沿着 b 点的垂直线平移到任意高度 h 处, 如图 2(4)所示。

2.2 曲线梁桥荷载横向分布的计算模型

对于由多片 T 形截面梁构成的简支超静定曲线梁桥(图 3(1)), 可以利用上述设想, 建立如图 3(2)所示的, 求荷载横向分布系数的计算模型。下面将对该模型做几点说明。

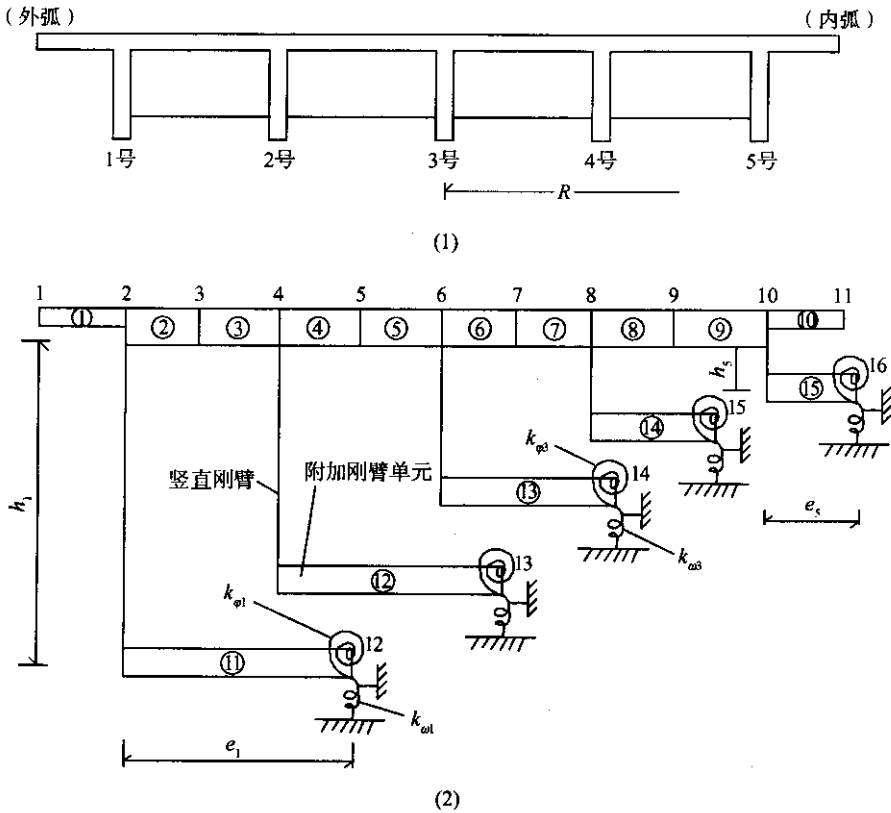


图 3 曲线梁桥荷载横向分布计算模型

(1)图 3(2)中所有单元的宽度均取 1 m, 忽略每个单元内、外弧长的微小差异, 以简化计算。根据实例分析, 这种忽略带来的误差甚微。

(2)位于内、外弧侧单元的厚度取 T 形梁翼缘的平均厚度, 但在有横隔梁的区段, 则按文献[5]中的方法, 将翼板与横隔梁构成的 T 形截面按抗弯惯矩等效为平均厚度

R 的函数, 故每片曲线梁所对应的弹簧刚度 k_w 、 k_φ 和刚臂长 e 是不相等的, 必须分别计算。

(4)为了便于应用有限元法程序, 所有水平刚臂均当作单元编号, 但令其刚度 $EI \approx \infty$, 将其一端(内弧侧)布置一对弹簧支承, 另一端则通过竖向刚臂直接与 T 形梁梁肋顶点所对应的单元结点连接。

(5)前面已述, 所有水平刚臂单元与横隔梁单元之

间的垂直距离 h_i 可以任意选定,它不影响计算结果。

(6)受荷后,由程序输出的各竖向弹簧支承反力便是所对应曲线梁的荷载横向分布系数 m^R (当布置车辆荷载时),或者是荷载横向分布影响线竖标 η^R (当为单位垂直荷载 $P=1$ 时)。

(7)各水平刚臂单元在位于梁肋一端的弯矩 M 值,便是所对应曲线梁的扭矩横向分布系数 m^T (注意,不要与扭矩荷载 m_t 混淆),或者是扭矩横向分布影响线竖标 ξ^T 。这一点是与文献[3,4]中直线梁的取值截然不同。后者是直接取抗扭弹簧支承的反力扭矩值,其理由可以从图 2(5)中水平刚臂单元的脱离体

平衡条件得到解释。

3 实例验证

为了验证本文计算模型的正确性,本文选取文献[1]中第 137 页的曲线梁桥算例为例,以资对比。该例是一座 5 片等截面预应力混凝土曲线梁桥,共有 5 根横隔梁,圆心角为 50° ,如图 4 所示。已知 $E=3.5\times10^7$ kN/m², $G=1.5\times10^7$ kN/m², $I_x=0.240\ 15\text{ m}^4$, $I_d=0.004\ 32\text{ m}^4$,横隔梁按桥中线为标准的等效翼板刚度 $I_1=0.020\text{ m}^4/\text{m}$ 。现将按本文方法的计算步骤叙述如下。

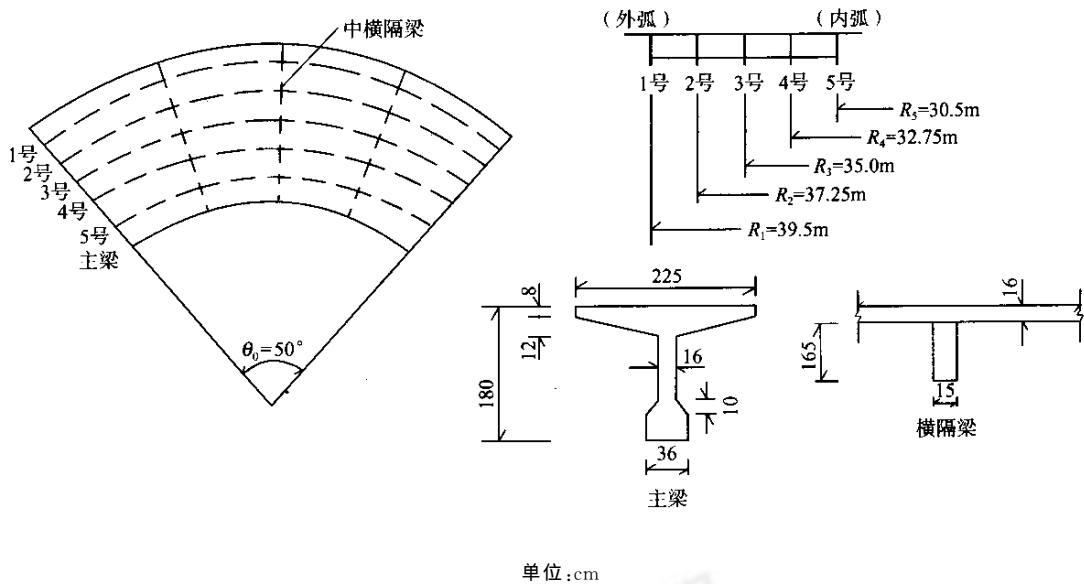


图 4 曲线梁桥荷载横向分布计算示例

(1)本例的梁数及截面形式与图 3 中的完全相同,故直接取图 3(2)的离散图作为本例的计算模型,仅在具体尺寸上做进一步的补充,以节省篇幅。

(2)①和⑩单元的截面尺寸均近似取宽×高=1.0 m×0.16 m;②~⑨单元取=1 m×0.62 m(按 I_1 值换算);⑪~⑮刚臂单元均取=1.0 m×1.0 m,但 $E_{\text{刚}}=1\times10^{16}$ kN/m²。

(3)按式(3)计算各个参数,过程从略,其结果为:
 $k=129.71, A=1\ 412\ 599\ 046/R_i^4,$
 $B=109\ 771\ 848/R_i^3, D=9\ 245\ 058/R_i^2,$
 $\Delta=1.009\ 701\ 501\times10^{15}/R_i^5$
(4)列表计算水平刚臂单元⑪~⑮的长度 e 及弹簧支承刚度 k_w, k_φ ,见表 1。

表 1 弹簧支承刚度及刚臂长度计算

梁号	$k_w/(\text{kN}/\text{m}^2)$	$k_\varphi/(\text{kN}\cdot\text{m}/\text{rad}\cdot\text{m})$	e/m	h_i/m
1(外弧)	580.27	458.12	3.0695	1.0
2	733.69	515.14	2.894 7	0.8
3	941.34	583.50	2.719 8	0.6
4	1 227.93	666.43	2.545 0	0.4
5(内弧)	1 632.37	768.38	2.370 1	0.2
说明	万方数据 按式(5)	按式(6)	按式(4)	任意取值

注:各片梁的曲率半径 R_i 见图 4。

(5)应用平面杆系有限元法程序,计算当 $p=1$ 分别作用于 2 号、4 号、6 号、8 号和 10 号结点上时的竖向弹簧支承反力 η_{ki}^R (即荷载横向分布影响线坐标 η_{ki}),及其相应的刚臂单元左端的弯矩 ξ_{ki}^T (即扭矩横

向分布影响线坐标 ξ_{ki}),其结果分别汇总于表 2 和表 3,并与文献[1]中按刚接梁法和刚性横梁法的计算结果并列,以资对比。

表 2 竖向荷载横向影响线坐标 η_{ki}

梁号(k)	计算方法	单位力 $P=1$ 的作用位置(i)				
		η_{k1}	η_{k2}	η_{k3}	η_{k4}	η_{k5}
1	本文有限元法	0.699 2	0.536 8	0.374 0	0.216 0	0.063 2
	刚接梁法*	0.707 3	0.542 1	0.379 4	0.220 4	0.066 2
	刚性横梁法*	0.741 9	0.575 8	0.409 7	0.243 6	0.077 5
2	本文有限元法	0.565 8	0.454 5	0.340 5	0.222 6	0.104 8
	刚接梁法	0.539 2	0.433 8	0.328 5	0.220 1	0.111 8
	刚性横梁法	0.591 5	0.476 4	0.361 4	0.246 4	0.131 4
3	本文有限元法	0.350 3	0.308 1	0.268 2	0.222 1	0.167 8
	刚接梁法	0.307 7	0.275 4	0.274 8	0.215 4	0.172 9
	刚性横梁法	0.353 0	0.316 1	0.276 0	0.237 5	0.199 0
4	本文有限元法	-0.004 9	0.062 0	0.130 1	0.200 0	0.262 6
	刚接梁法	-0.032 6	0.048 1	0.121 4	0.195 6	0.265 7
	刚性横梁法	-0.016 3	0.058 9	0.134 2	0.209 4	0.284 6
5	本文有限元法	-0.610 4	-0.361 4	-0.112 9	0.139 3	0.401 7
	刚接梁法	-0.521 6	-0.299 5	-0.077 2	0.148 3	0.383 3
	刚性横梁法	-0.583 5	-0.339 1	-0.094 7	0.149 7	0.394 1
$\sum \eta_{ik}$	本文有限元法	1.000 0	1.000 0	0.999 9	1.000 0	1.000 1
	刚接梁法	1.000 0	0.999 9	0.999 9	0.999 8	0.999 9
	刚性横梁法	1.086 6	1.077 3	1.091 3	1.866	1.086 6

注: * 表中按刚接梁法和刚性横梁法的计算结果是直接摘自文献[1]中的表 7-7 值。

表 3 扭矩横向影响线坐标 ξ_{ki}

梁号(k)	计算方法	单位力 $P=1$ 的作用位置(i)				
		ξ_{k1}	ξ_{k2}	ξ_{k3}	ξ_{k4}	ξ_{k5}
1	本文有限元法	2.044 0	1.577 0	1.106 0	0.646 7	0.201 1
	刚接梁法*	2.099 3	1.583 0	1.099 8	0.647 5	0.192 8
	刚性横梁法*	2.128 7	1.645 3	1.161 9	0.678 6	0.195 2
2	本文有限元法	1.527 0	1.238 0	0.939 9	0.626 6	0.311 5
	刚接梁法	1.482 9	1.169 5	0.886 5	0.683 0	0.315 7
	刚性横梁法	1.542 9	1.238 1	0.933 3	0.628 6	0.323 7
3	本文有限元法	0.834 1	0.753 3	0.678 4	0.584 5	0.466 0
	刚接梁法	0.760 6	0.658 1	0.608 8	0.551 1	0.473 1
	刚性横梁法	0.784 0	0.709 2	0.634 3	0.559 5	0.484 6
4	本文有限元法	-0.139 6	0.065 4	0.273 3	0.485 8	0.679 4
	刚接梁法	-0.190 5	0.021 3	0.239 7	0.460 5	0.672 3
	刚性横梁法	-0.205 1	0.018 2	0.241 6	0.464 9	0.688 3
5	本文有限元法	-1.588 0	-0.959 6	-0.333 3	0.302 3	0.964 1
	刚接梁法	-1.346 3	-0.797 2	0.235 1	0.328 9	0.918 5
	刚性横梁法	-1.505 4	-0.891 8	-0.278 2	0.335 4	0.949 0

注: * 同表 2

通过本例的计算结果对比表明,按本文提出的计算模型和应用有限元法程序的计算结果,虽与文献[1]中的给出值稍有差异,但从总的来看,基本上是符合的,因此可以用在设计中。

4 结语

通过以上分析和实例验证,可以做出以下几点结论。

(1)本文虚拟一组附加的水平刚臂单元,有效地将曲线梁桥弯-扭耦合效应在理论上给以分离,分别导得了两类弹簧支承(竖向和扭转)刚度的计算公式,从而建立了能够应用平面杆系有限元程序,来分析曲线梁桥荷载横向分布系数的计算模型,其计算结果与文献[1]中的基本相符,因而它可被推广应用于工程设计中。

(2)本文计算方法具有概念明确、计算简便的优点,既避开了繁复的手算,又可不需应用空间有限元法程序也能完成这项分析工作,因此,它将会为工程

设计人员所乐用。

(3)如果设计人员所应用的程序具有文献[4]中所要求的功能时,那末,本文计算模型不但可以直接求算各片曲线梁的荷载横向分布系数(即不需多次布载、试算和影响线竖标的内插),而且还可以绘出中横隔梁的内力包络图,从而扩大了它的应用范围,具体的方法可以参考文献[4]。

参考文献:

- [1] 邵容光,夏淦. 混凝土弯梁桥[M]. 北京:人民交通出版社,1994.
- [2] 孙广华. 曲线梁桥计算[M]. 北京:人民交通出版社,1995.
- [3] 程翔云,李立峰. 带悬臂翼缘的整体式钢筋混凝土连续板桥计算模型[J]. 公路,2004,(1).
- [4] 程翔云. 刚接梁桥中横隔梁的内力包络图计算模型[J]. 公路,2004,(2).
- [5] 同济大学路桥教研组. 公路桥梁荷载横向分布计算[M]. 北京:人民交通出版社,1977.

Calculating Model of Load Transverse Distribution for Rigid-Jointed Curved Girder Bridges

CHENG Xiang-yun

(Civil Engineering Institute,Hunan University,Changsha 410082,China)

Abstract: With the aid of additional horizontal rigid arm elements the bending-torsional coupling effect of curved girder is separated. Thus, the calculative formula of rigidity for two spring bearings (vertical and torsional) may be obtained separately. On this basis the model suitable to the computer program for analyzing the load transverse distribution of curved girder bridges is established. The correctness of this model is proven by a practical example, and this method can simplify the calculative process greatly.

Key words: rigid-jointed curved girder bridge; load transverse distribution; additional rigid arm; bending-torsional coupling effect; spring bearing

天津编织高标准公路网

截至目前,天津市的公路通车里程已达 10 168 km,全市公路网的密度为每百平方公里 85.3 km,在全国大中城市中名列前茅。

近年来,天津市相继建成了京津塘、津保、津晋、津滨、津蓟等 9 条高速公路,对外环线等 847 km 干线公路进行了提级改造,新、改建乡村公路 1 954 km,初步形成了以国道和市级公路为骨架,辅以县乡公路的高标准公路网。目前,在 1 万余 km 的公路网中,高速公路占 517 km、市级以上干线公路 1 931 km、农村公路 7 720 km,二级以上高等级路面为 1 005 km,占全市公路网比重的 23.7%。