机构法结合遗传算法优化拱桥设计

彭栋木，C.A. Fairfield，聂建国

（深圳市市政工程设计院，广东深圳　518035）

摘　要：对结构工程师来说，设计优化正变得日益重要。该文描述了一种结合机构法和遗传算法进行整体化设计优化的方法。前种方法是当前英国交通部采用的一种主要的计算拱的工具；后者是强有力的数值函数优化方法。文中显示了英国肯特 Teston 桥和一系列其它样本设计优化的试算结果及相关的算法有效性数据。建议本方法为涉及现存桥梁的评估、维护和修理及新拱桥设计的结构工程师的设计辅助工具。

关键词：设计优化；基因算法（GAs）；机构法；整合；拱桥

中图分类号：U448.22　**文献标识码**：A　**文章编号**：1009-7716(2006)03-0091-03

1　引言

拱桥的历史可以追述到公元前 3600 年的古埃及和美索不达米亚（西南亚地区）。中国最古老的现存石拱桥——赵州桥，建于公元 500 年，曾经受过地震、洪水、交通荷载、恶劣天气的影响。近年来，英国交通基础设施中现役的大约 75 000 座石拱桥引起了研究者的兴趣。1999 年 1 月起，欧盟委员会将提高当前 40t 最大车辆净重至 44t，轴重也从 10t 相应提高到 11.5t，许多将必须加固或重建。

过去的本课题研究仅局限在几种评估方法，如塑性分析法[3]，机构法以及有限元法。本文通过整合遗传算法（GA）和机构法，提出了一种全新的评估、设计工具。本文的分析主要基于目前比较流行的平拱桥，因其对跨越道路能提供最大的净空而全过程寿命费用较少，利用 GA 方法，得出了几近最优的设计参数。

2　机构法

机构法是一种极限状态塑性分析法，假定拱的破坏形态是 4 或 5 铰机构。笔者根据机构法编制了一个拱的分析程序 Archmech，基于 Pipard 和 Baker 的预测破坏荷载及整体稳定要求的研究成果。为简略起见，机构法的要点不在此赘述[1]。

3　遗传算法

遗传算法（GA）起源于生物进化和自然基因机制，结合了适者生存的概念及自然的基因算子，形成了强有力的搜索方法。这种推理性搜索算法，强调自然过程，起源于 70 年代初期，当时 Holland 首次提出了 GA。Goldberg 在推广应用 GA 方面，起了重要的作用。许多研究人员验证了这种方法在土木工程应用方面的函数优化的有效性。Gas 在计算上简单，但在改进搜索解法方面功能强大。

已经发展了几种方法用于钢拱、桁架桥及类似的结构的设计优化，但迄今为止，未见用于石拱桥。利用经典平衡方程，Amazigo 研究了平拱抵抗穿透式翘曲的设计优化问题。

这些传统的优化方法仅考虑了拱肋，而忽视了回填料及道路铺装层的作用。另外，大多数假定设计变量是连续的，这并不总是对的，特别是石块拱肋、砖砌拱肋情形下。早期的优化方法还有一些数学上的问题：比如，与专门知识有关（非普及的），单点搜索（低效率），局部优化（非总体优化），不必要严格的限制条件导致设计优化的局限性。GA 可以处理离散变量，克服上述传统的优化方法所遇到的问题。利用离散变量进行优化更为合理，因为每组设计数据都是实际可行的。

3.1　为设计变量编码

GA 不直接使用设计变量，而必须编码。每个变量处理成二进制数据。每组设计数据编码成一个包括所有设计变量的二进制数据的长数据串。例如：假定 1/4 跨径拱肋厚度 t，以步长 50mm 在[50～800mm]范围内变化。当 t=50mm，对应的二进制数据为 t=0000，t=100mm，对应的数据为 t=0001，类推至 t=1111，表示 t=800mm。其它的变量也相应离散、编码，形成一长数据串。每代长数据串的数量定义为人口数量，用 popsize 表示。

3.2　适应值函数

GA 一般用来最大化目标函数，如果优化目标是最小化，必须将它转化成适应值函数。有许多可行的转化方法，笔者自创的转化方法参见方程（6）。

$$f_i^t=-a\phi_i^t+b \qquad i=1,\ldots,\ N \tag{6}$$

其中 f_i^t 是第 t 代人口中第 i 个数据串的适应值函数值；ϕ_i^t 是目标函数值（对无约束问题）或修正目标函数值（对有约束问题）。系数 a and b 来自方程(7)和(8)。

$$a=\frac{c\phi_{max}-\phi_{min}}{\phi_{max}-\phi_{min}} \tag{7}$$

$$b=\frac{c\phi^2_{max}-\phi^2_{min}}{\phi_{max}-\phi_{min}} \tag{8}$$

其中 max 和 min 是一代人口时的目标函数的最大和最小值，c 是用于控制适应值函数最大值的经验参数 $(0.5\leqslant c\leqslant 1.0)$。本文中 c 取 0.8。

$$c=0.8 \tag{9}$$

3.3　GA 算子

可得到的 GA 算子包括：杂交、变异和再生算子。杂交算子是一种重组算子，分三步进行：算子寻求两独立串间的协调，选择一个互换其值的杂交点，从而杂交了该两串。下面具体解释：假定两个从起始人口中任意选定的串 p1 和 p2，由方程（10）和（11）给出。

p1=1011#01　　（10）

p2=0101#11　　（11）

杂交结果如下：

p1'=101111　　（12）

p2'=010101　　（13）

变异算子产生人口内的分散，属改进优化解的一个重要特征。下面具体解释：假定一个串 p3，由方程（14）给出。

P3=101(1)01　　（14）

变异要求选择一个任意位置，如上述的位置 4。其结果如下：

P3'=101(0)11　　（15）

收稿日期：2005-09-19

作者简介：彭栋木（1965-），男，江西万载人，高级工程师，博士学位，深圳市市政工程设计院副总工程师，

变异的个数可以是一个或多个。

再生算子是保证适者生存串的个数。为满足 DeJong 的要求(高杂交性、低变异性和中等人口数量),笔者用 C++ 语言编制的、基于 Goldberg 的 Pascal 子程序的 GA 程序采用了下列参数:杂交可能性 $p_{cross}=0.8$,变异可能性 $p_{mutation}=0.005$,popsize 为中等,一代最大数量 maxgen 也为中等,染色体长度 lchrom 与问题大小相关,及杂交点数量 $n_{cross}=2,3,or4$。

4 计算结果:GAs 在拱肋 – 回填料耦合系统上的应用

给定一个跨径为 S 的拱桥,桥面上受一个集中荷载 $83.5kNm^{-1}$,的作用,其等效轴载为 11.5t。其它形式荷载的优化设计也可类似处理。假定拱桥的破坏为 4 或 5 铰机构形式,相应的目标函数和优化可以表达为方程(16)。

$$\text{优化目标:}\ \phi(X)=\begin{cases}\tau & \text{For Ex.1}\\ \dfrac{st(k+k'+2)}{4} & \text{For Ex.2}\\ P & \text{For Ex.3}\end{cases} \tag{16}$$

例 1 优化设计参数 τ,为 1/4 跨拱肋厚度 t 与矢高 h_c 之比。例 2 优化拱的横断面面积 A 由方程(17)给出:其中 k 和 k' 分别是拱脚和拱顶处相对于 1/4 跨拱肋厚度 t 的竖向厚度。

$$A\approx\frac{st(k+k'+2)}{4} \tag{17}$$

例 3 优化极限荷载 P。其它设计参数 α、β 和 δ 参见方程(18)-(20)。拱肋和回填料的平均密度定义为 γ。

$$\alpha=\frac{h_q}{h_c} \tag{18}$$

$$\beta=\frac{h_0}{h_c} \tag{19}$$

$$\delta=\frac{h_c}{s} \tag{20}$$

4.1 算例 1:优化设计参数 τ

表示目标函数的方程(16)的目的是优化 τ。即 t/h_c。在 popsize=70,$l_{chrom}=12$,and maxgen=70,$n_{cross}=2$ 的条件下,表 1 显示了三组 GA 运行的结果:最优串是 110011111110,其适应值为 9.9965。相应的 τ 值是 0.003466,即 1/4 跨径处拱肋竖向厚度为 1/4 跨径处矢高的 0.3466%。如果这种精度不影响其稳定性,这个比例对任意选定的跨径、矢高和厚度都是最优的。α,β,k 及优化值 τ 可以容易地转化成工程图纸数据。参照本算例,对荷载因子为 τ 时重复进行了计算,优化 τ 值为 0.101247。这个结果很合逻辑,荷载越大,需要的拱肋厚度越大以包容其产生的压力线。对其它荷载因子,可进行类似的计算。

表 1 优化设计参数 τ: $\alpha\in[0.6,0.9]$, $\beta\in[0,1]$, and $k\in[0.9,1.1]$

运行	最优串	α	β	k	适应值	$\tau(\times10^2)$	R_{search}(%)
1	110110111100	0.860	0.733	1.06	9.9925	0.7551	2.10
2	111010001111	0.853	0.533	1.10	9.9843	1.5718	2.39
3	110011111110	0.840	1.000	1.087	9.9965	0.3466	9.57

作为一种检查 GA 的计算效率工具,笔者定义了一个由方程 (21) 至 (23) 确定的搜索参数。假定一个虚拟的人口,popnum:

$$popnum=popsize\times maxgen\times[1-(1-p_{cross})^{n_{cross}}] \tag{21}$$

计算整个搜索空间:

$$search\ space\ size=2^{l_{chrom}} \tag{22}$$

再定义搜索率,Rsearch 为:

$$R_{search}=(popnum/2^{l_{chrom}}) \tag{23}$$

如表 1 所述,计算最优串时,触及最优适应值(稍大于优化结果的 99%),仅仅检查了不及整个搜索空间的 10%,即 $R_{search}=9.57\%$。这显示了所选用方法的有效性。必须注意的是 $\frac{\partial}{\partial f(x)}(R_{search})$ 不是常数,比如运行 1 搜索的人口空间比运行 2 小,但展示的适应值更大。其部分原因是运行 1 和运行 2 的初始串的选择是任意的。结果显示了较大的适应值,说明本方法能够得出近于最优解的替代设计。可以推断,这将有助于现场的结构工程师,特别是在相应的变量是离散的情况下。

其后,收敛性检查如下:将某一代的每一串作为矩阵的列向量形成一个矩阵。将这些列与前一代的进行比较,如果后续代的 90% 列与前一代的相同,则认为达到收敛。从数学角度上来说,通过前后代减法来实现:当得到零矩阵时,达到 100% 的收敛,说明每一串与前一代的完全一致。如果不足 90% 的串与前代相符,则进化到下一代,然后再进行收敛性验证。

4.2 算例 2:关于拱的横截面面积(立面)的优化

本算例是优化如方程(17)所定义的拱的横截面面积,目的是利用最少的材料来提供足以支撑其上的车辆轴载的结构强度和刚度。拱肋的竖向厚度罗列如下:1/4 跨为 t;拱脚处为 kt;及拱顶处为 tk'。可描述本优化问题如下:最小化面积 A,一个涉及自变量 a α,β,γ,δ,k and k',约束条件:形成一个 4 铰破坏机构(或在拱顶集中荷载作用下的 5 铰破坏机构)。

在 popsize=70,$l_{chrom}=12$,及 2 个杂交位置的条件下,经过九代 GA 运行,找到了具有适应值 99.99929 的最优值。相应的 α,β,γ,δ,k,k' 及优化的面积 A 的值,可以快速的转化成工程施工图。由式 (24) 中的值可以导出相应的面积 A 为 $0.67m^2$。

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ k\\ k'\end{Bmatrix}=>\begin{Bmatrix}0.833\\ 1.647\\ 27.33\\ 0.165\\ 1.933\\ 0.800\end{Bmatrix}=>\begin{Bmatrix}h_q\\ h_0\\ h_c\\ \gamma\\ k\\ k'\end{Bmatrix}=>\begin{Bmatrix}1.375\\ 2.717\\ 1.650\\ 27.33\\ 1.933\\ 0.800\end{Bmatrix} \tag{24}$$

对于跨度 10m,式(24)表示矢高 h_c 为 1.650m,1/4 跨竖向拱肋厚度 t 为 0.057m,拱顶厚度 tk' 为 0.046m,及拱脚厚度 kt 为 0.111m。

类似的 GA 运行可以得出一个紧紧包围压力线的拱的轮廓,由最小拱肋厚度导出的拱肋横截面面积仅仅为 $0.00858m^2$。这样一个拱其实是不实际的,即便它能包围住其压力线。诸如随着时间发展的拱脚沉降,外伸及内闭都将破坏这样一个细长的拱肋。考虑到冲击及瞬时动力荷载、桥梁撞击以及使用极限状态要求,这样的优化设计结果其实是不能采用的。但是,GA 可以用来预测压力线,通过自动优化拱肋直至压力线不再包围在其中,导出最可能的铰的位置。由此可以得到更为实际的拱肋,可以从 GA 产生的近于最优解的范围中选取。

对于压力线的位置(即最小横截面面积状态时的拱肋),在 R_{search} 等于 0.93% 时,得到最优解。相比之下,当 R_{search} 等于 0.89% 时,GA 运行收敛到一个实际最优解(即拥有可观的横截面面积时的拱肋)。较低的 R_{search} 值再次显示了 GA 在这些应用上的效率。为参考起见,图 1 描述了始自搜索空间中的任意点的 3 个 GA 运行的进化结果。所用的 CPU 时间仅以秒

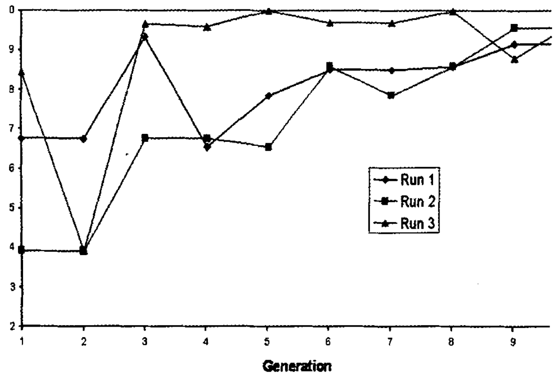

图1 GA运行的过程和收敛:优化拱的外轮廓

计,即快速达到收敛。各运行所需的CPU时间,其差别并不大。最终的适应值比较相似,过程数据集为设计者提供了选择几近最优解的范围。

4.3 算例3:优化英国肯特郡TESTON桥的承载力P

相应的目标函数详见式(16),其计算过程和结果类似于算例1和算例2,限于篇幅,不在此赘述。

5 结论

机构法和基因算法的整合成功地应用于拱桥设计的优化问题,也对涉及桥梁日常评估和维护的工程师有参考价值。本文算例能产生若干组等效的、可行的设计(皆近于最优解),为桥梁设计者提供了一个工程与美学协调实践而不必降低结构承载力的范围。所用的优化过程在计算上是有效的,所有的运行即便在低配置的个人电脑上都很快。将来的改进包括对输出结果的后处理图形化。