附　录

附录A　平面图形的几何性质

§A-1 静矩和形心

§A-2 惯性矩和惯性积

§A-3 平移轴公式

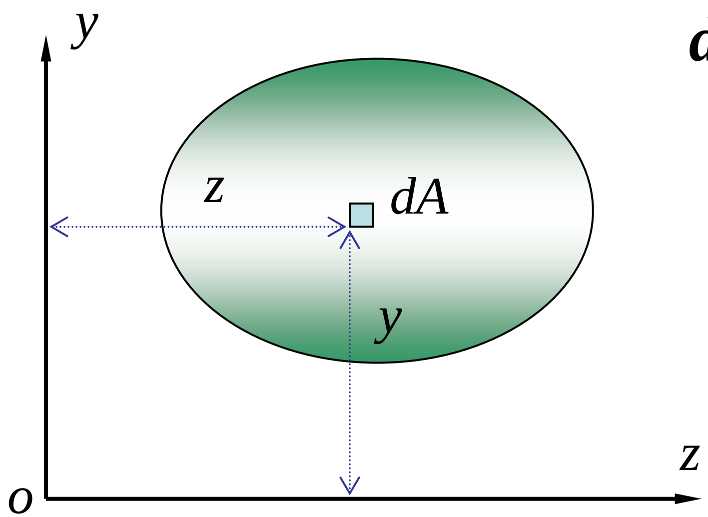
§A-4 转轴公式

§A-5 主惯性轴、主惯性矩、形心主惯性矩

§A-1　静矩和形心

一、简单图形的静矩（面积矩）

1、定义：



dA对z轴的微静矩：　$dS_z = ydA$

dA对y轴的微静矩：　$dS_y = zdA$

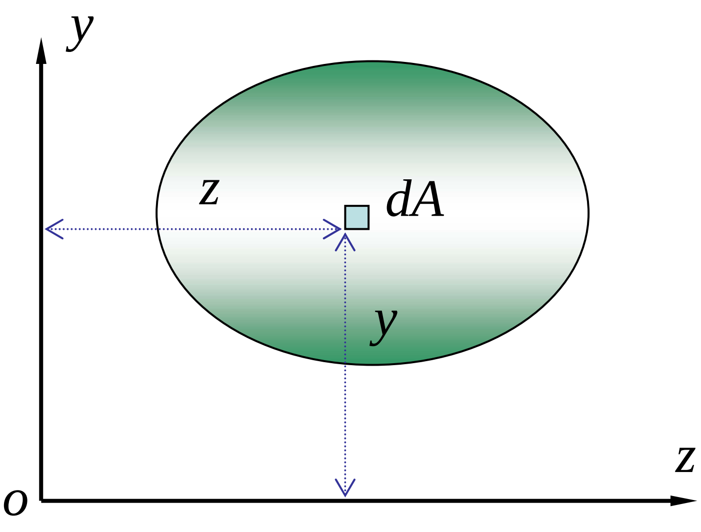
$$S_z = \int_A ydA$$

$$S_y = \int_A zdA$$

2、量纲：［长度］^{3}；单位：m^3、cm^3、mm^3。

3、静矩的值可以是正值、负值、或零。

4、静矩和形心的关系



由平面图形的形心公式

$$y_C = \frac{\int_A y \cdot dA}{A}, \quad z_C = \frac{\int_A z \cdot dA}{A}$$

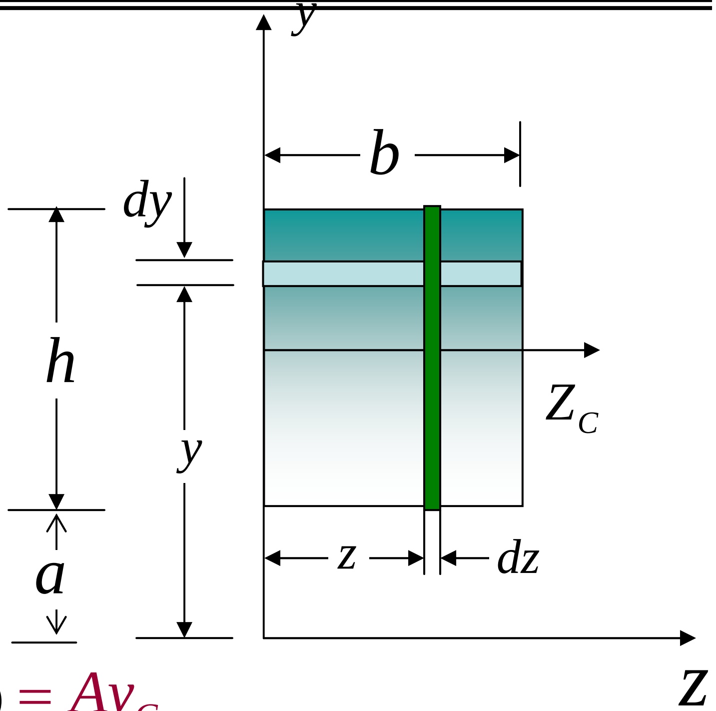
可知

$$\left.\begin{array}{l} S_y = \int_A z dA = A z_C \\ S_z = \int_A y dA = A y_C \end{array}\right\} \text{静矩和形心的关系}$$

结论： 图形对过形心的轴的静矩为零。

若图形对某轴的静矩为零，则此轴一定过图形的形心。

求图形对y、z 轴的静矩



$$S_z = \int_A y dA = \int_a^{a+h} ybdy = \frac{by^2}{2}\Big|_a^{a+h} = bh(a+\frac{h}{2}) = Ay_C$$

$$S_y = \int_A zdA = \int_0^b zhdz = \frac{hz^2}{2}\Big|_0^b = bh\frac{b}{2} = Az_C$$

$$S_{z_c} = \int_A ydA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ybdy = \frac{by^2}{2}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$$

二、简单图形的形心

1、形心坐标公式：

$$\left.\begin{aligned} y_c &= \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y dA}{A} \\ z_c &= \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z dA}{A} \end{aligned}\right\}$$

2、形心确定的规律：

（1）图形有对称轴时，形心必在此对称轴上。

（2）图形有两个对称轴时，形心必在此两对称轴的交点处。

三、组合图形（由若干个基本图形组合而成的图形）的静矩：

基本图形----指面积、形心位置已知的图形

$$S_z = \sum S_{zi} = \sum A_i y_{ci}$$

$$S_y = \sum S_{yi} = \sum A_i z_{ci}$$

四、组合图形的形心：

$$y_c = \frac{\sum S_{zi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i y_{ci}}{A}$$

$$z_c = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i z_{ci}}{A}$$

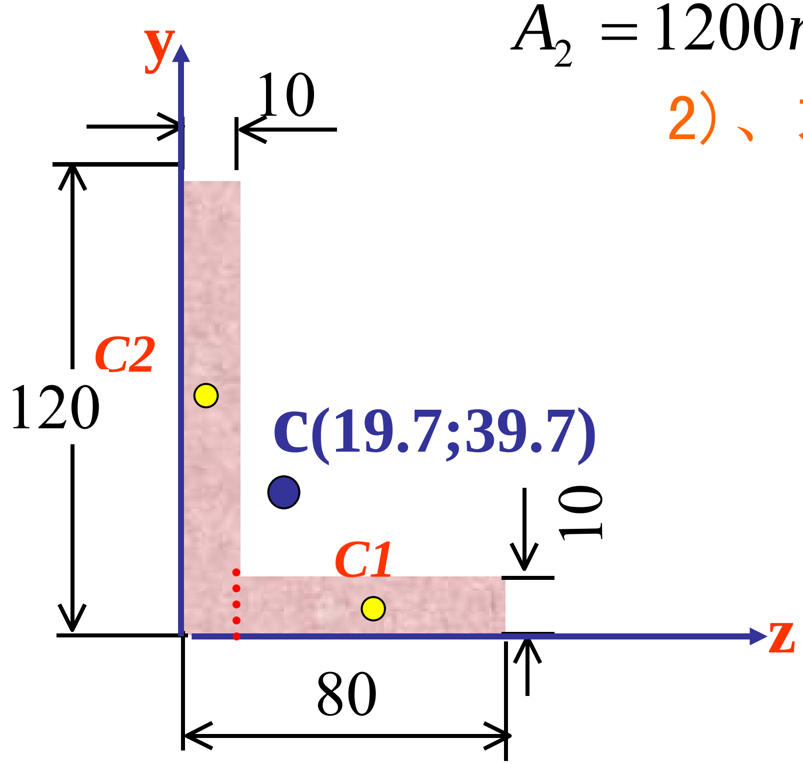
利用基本图形的结果，可使组合图形的形心计算简单

例 试确定下图的形心。

解法1： 1)、建立坐标如图示，分割图形

$$A_1=700mm^2,\quad z_{c1}=45mm,\quad y_{c1}=5mm$$

$$A_2=1200mm^2,\quad z_{c2}=5mm,\quad y_{c2}=60mm$$



2)、求形心

$$z_c=\frac{\sum A_i z_{ci}}{A}=\frac{A_1 z_{c1}+A_2 z_{c2}}{A_1+A_2}$$

$$=\frac{45\times700+5\times1200}{700+1200}=19.7mm)$$

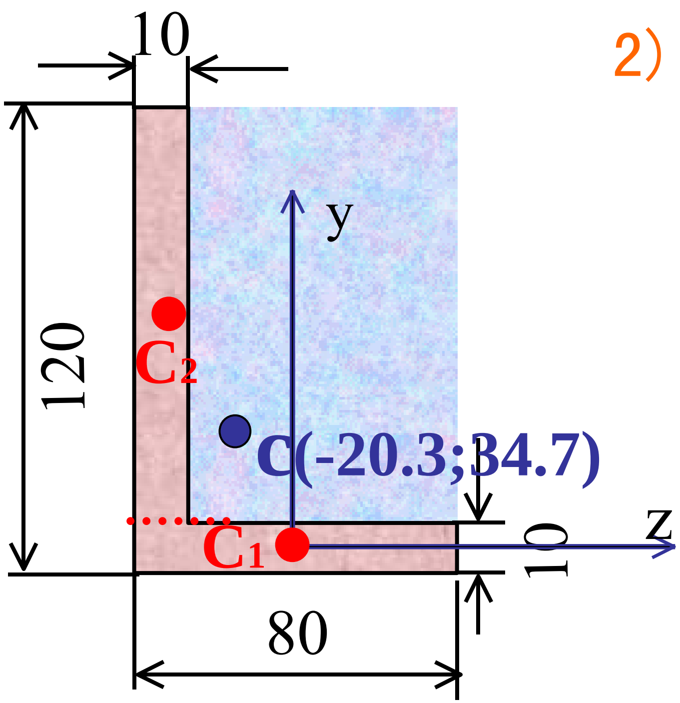
$$y_c=\frac{\sum A_i y_{ci}}{A}=\frac{A_1 y_{c1}+A_2 y_{c2}}{A_1+A_2}$$

$$=\frac{5\times700+60\times1200}{700+1200}=39.7(mm)$$

解法二：1）、分割图形及建立坐标系，如图所示

$$A_1 = 800mm^2,\quad z_{c1} = 0,\ y_{c1} = 0.$$

$$A_2 = 1100mm^2,\quad z_{c2} = -35mm,\ y_{c2} = 60mm$$



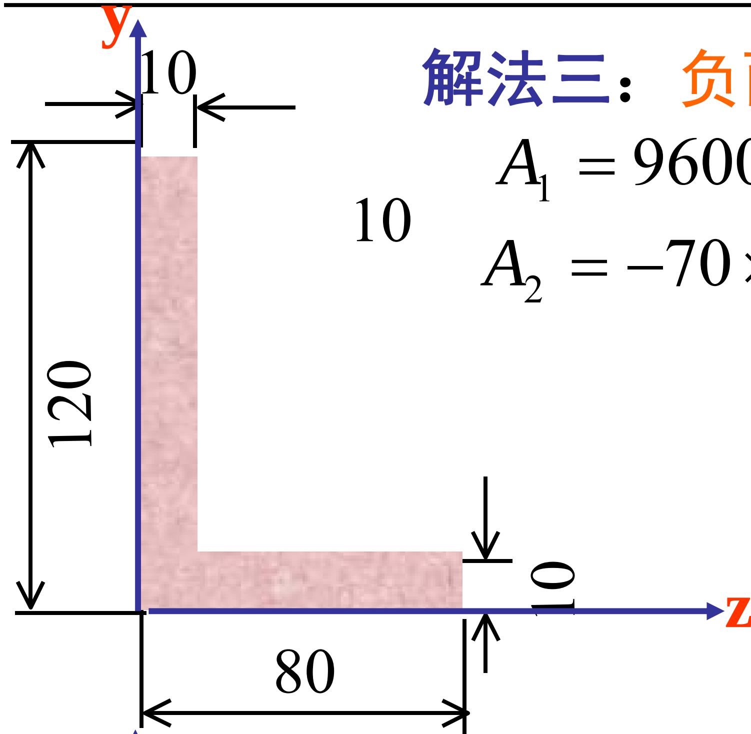
2）、求形心

$$z_c = \frac{\sum A_i z_{ci}}{A} = \frac{A_1 z_{c1} + A_2 z_{c2}}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{-35 \times 1100}{10 \times 110 + 80 \times 10} = -20.3(mm)$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_{ci}}{A} = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{60 \times 1100}{10 \times 110 + 80 \times 10} = 34.7(mm)$$



解法三：负面积法

$$A_1 = 9600mm^2,\quad z_{c1} = 40mm,\quad y_{c1} = 60mm$$

$$A_2 = -70\times 110mm^2,\quad z_{c2} = 45mm,\quad y_{c2} = 65mm$$

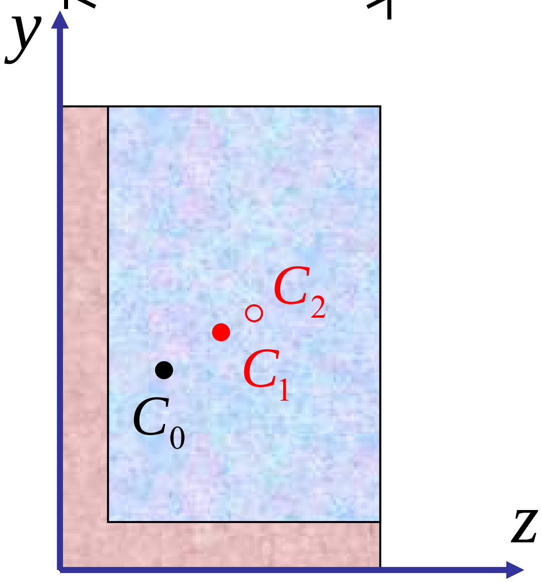
求形心：

$$z_c = \frac{\sum A_i z_{ci}}{A} = \frac{A_1 z_{c1} + A_2 z_{c2}}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{40\times 96 + 45\times(-77)}{12\times 8 - 7\times 11} = 19.7(mm)$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_{ci}}{A} = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2}$$

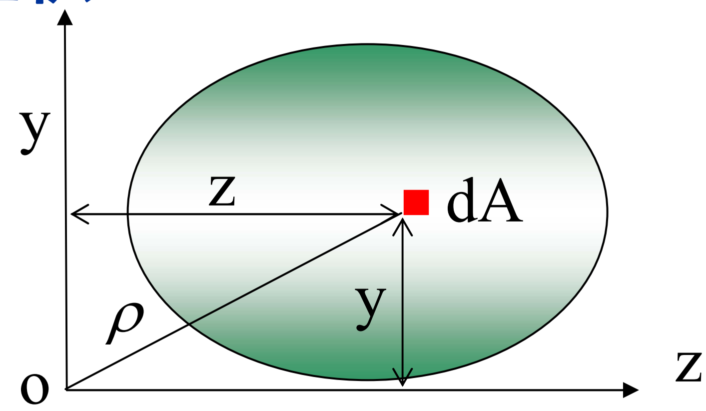
$$= \frac{60\times 96 + 65\times(-77)}{96-77} = 39.7(mm)$$



§A-2　惯性矩和惯性积

一、简单图形的惯性矩

1、定义：



dA对z轴的惯性距：　$dI_z = y^2 dA$

dA对y轴的惯性距：　$dI_y = z^2 dA$

图形对z轴的惯性矩：$I_z = \int_A y^2 dA,$

图形对y轴的惯性矩：$I_y = \int_A z^2 dA$

$$\rho^2 = z^2 + y^2$$

2、量纲：m4、mm4。

3、惯性矩是对轴而言（轴惯性矩）。

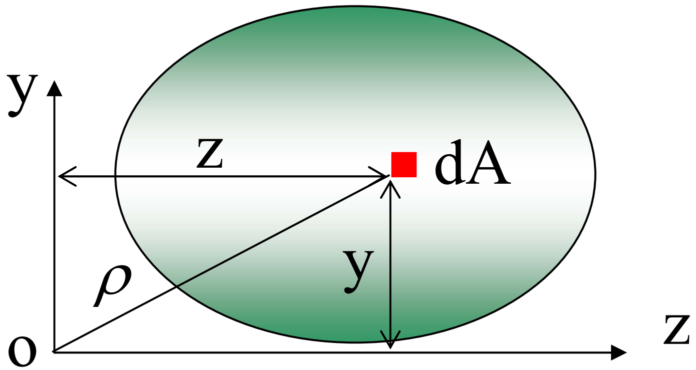
4、惯性矩的取值恒为正值。

5、极惯性矩：（对o点而言）$I_o = \int_A \rho^2 dA = I_p$

6、惯性矩与极惯性矩的关系：

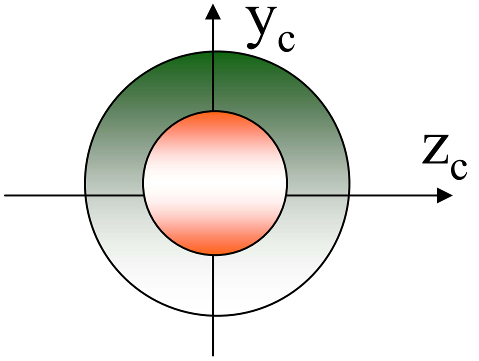
$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA$$

$$= \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y$$



图形对任一对相互垂直的坐标系的惯性矩之和恒等于此图形对该两轴交点的极惯性矩。

7、简单图形惯性矩的计算



(1) 圆形截面：

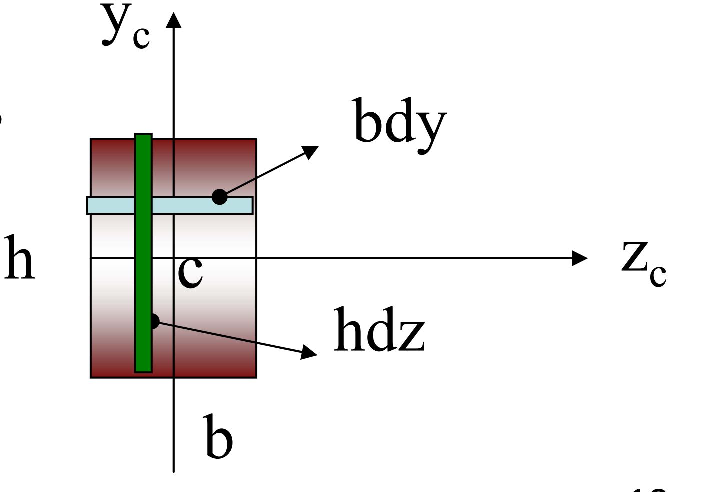
实心（直径D）—— $I_z = I_y = \frac{1}{64}\pi D^4$

空心（外径D，内径d）—— $I_z = I_y = \frac{1}{64}\pi (D^4 - d^4)$

(2) 矩形截面：

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 h dA = \frac{1}{12} hb^3$$



$$I_z = \frac{1}{12} bh^3 \qquad I_y = \frac{1}{12} hb^3$$

二、惯性半径：

$$I_z = Ai_z^2 \rightarrow i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \qquad I_y = Ai_y^2 \rightarrow i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

三、简单图形的惯性积

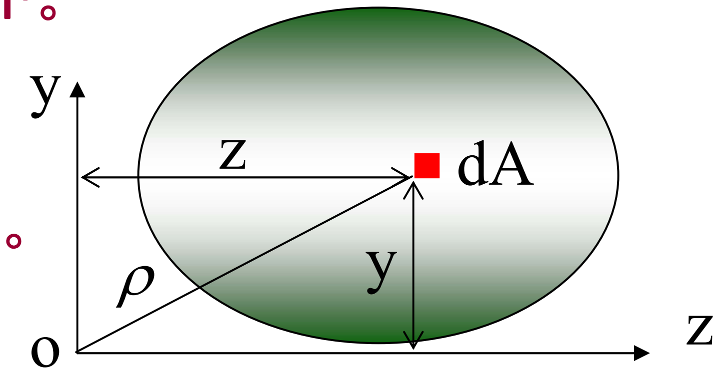
1、定义： $$I_{zy} = \int_A zydA$$

2、量纲：［长度］^{4}，单位：m^4、mm^4。

3、惯性积是对轴而言。

4、惯性积的取值为正值、负值、零。

5、规律：

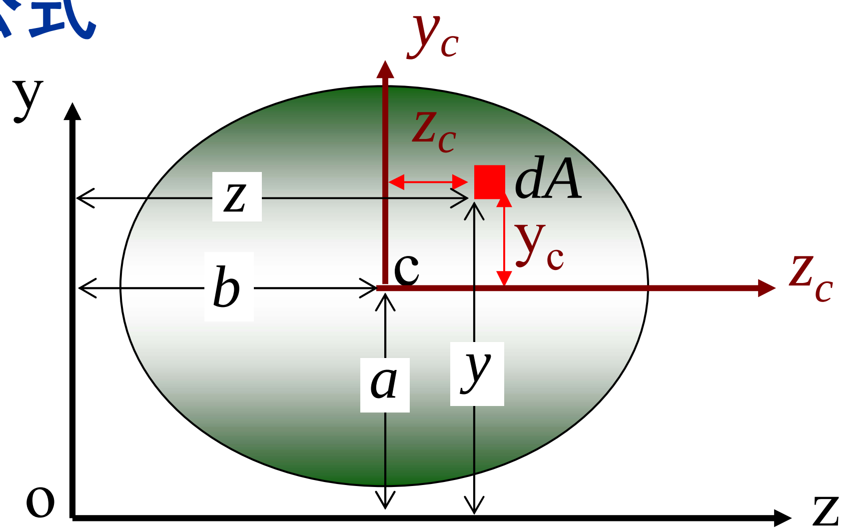


两坐标轴中，只要有一个轴为图形的对称轴，则图形这一对坐标轴的惯性积为零。

§ A-3 平行移轴公式

一、平行移轴公式

已知：图形截面积A，形心坐标 y_c、 z_c、I_{zc}、I_{yc}、 a、b已知。Z_c 轴平行于z轴；y_c轴平行于y轴。



求：I_z、I_y。

解：

$$I_z=\int_A y^2dA=\int_A (y_c+a)^2dA=\int_A y_c^2dA+\int_A a^2dA+2a\int_A y_cdA=I_{zc}+a^2A$$

$$I_y=\int_A z^2dA=\int_A (z_c+b)^2dA=\int_A z_c^2dA+\int_A b^2dA+2b\int_A z_cdA=I_{yc}+b^2A$$

$$I_{zy}=\int_A yzdA=\int_A (y_c+a)(z_c+b)dA$$

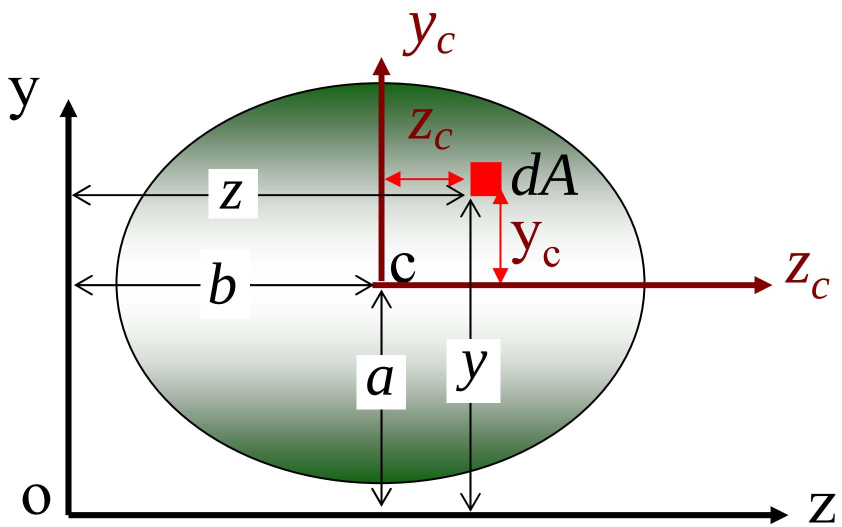
$$=\int_A y_cz_cdA+\int_A abdA+a\int_A z_cdA+b\int_A y_cdA=I_{zcyc}+abA$$

$$I_z = I_{zc} + a^2 A$$

$$I_y = I_{yc} + b^2 A$$

$$I_{zy} = I_{zcyc} + abA$$

——平行移轴公式



注意：Z_C、Y_C 为形心坐标。

a、*b*为图形形心在*yoz*坐标系的坐标值，可正可负

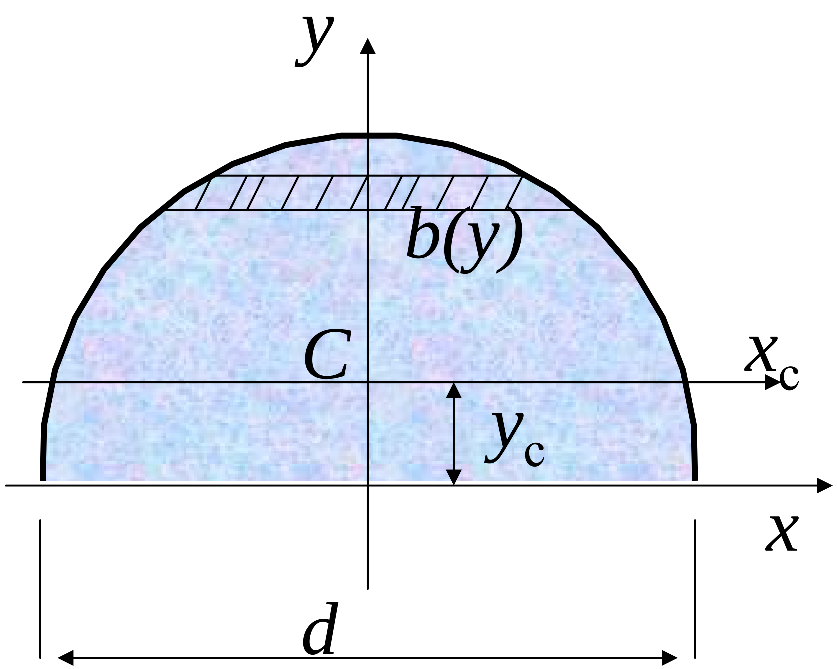
二、组合图形的惯性矩和惯性积

根据惯性矩和惯性积的定义易得组合截面对于某轴的惯性矩（或惯性积）等于其各组成部分对于同一轴的惯性矩（或惯性积）之和：

$$I_z = \sum I_{zi}\ ,\ I_y = \sum I_{yi}\ ,\ I_{zy} = \sum I_{ziyi}$$

例 求图示直径为d 的半圆对其自身形心轴 x_c 的惯性矩。

解： § A-1



$$b(y)=2\sqrt{R^2-y^2}$$

$$S_x=\int_A y\,\mathrm{d}A=\int_0^{\frac{d}{2}} y b(y)\,\mathrm{d}y$$

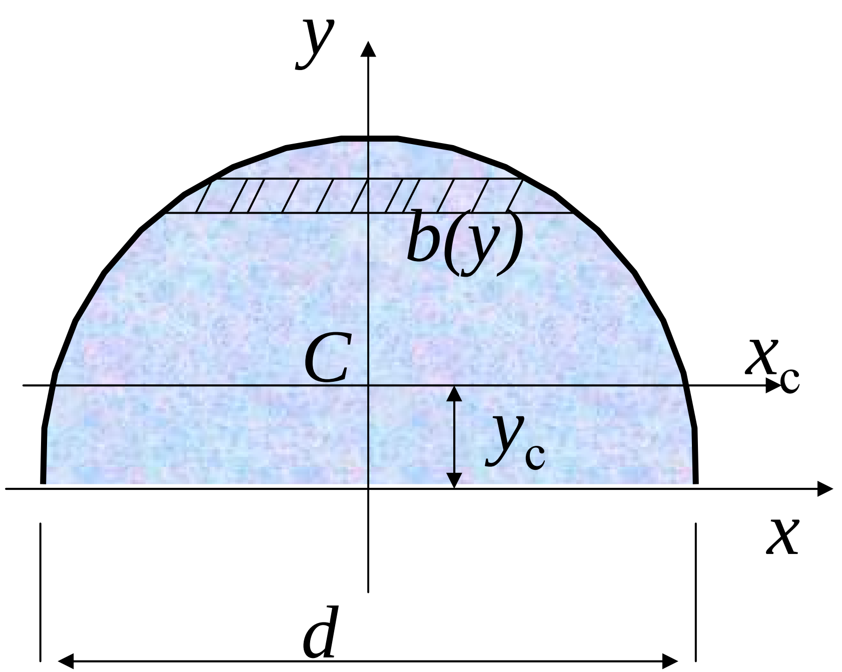
$$=\int_0^{\frac{d}{2}} y\cdot 2\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{d^3}{12}$$

$$y_c=\frac{S_x}{A}=\frac{d^3/12}{\pi d^2/8}=\frac{2d}{3\pi}$$

$$y_c=\frac{S_x}{A}=\frac{d^3/12}{\pi d^2/8}=\frac{2d}{3\pi}$$

2、求对形心轴 x_c 的惯性矩

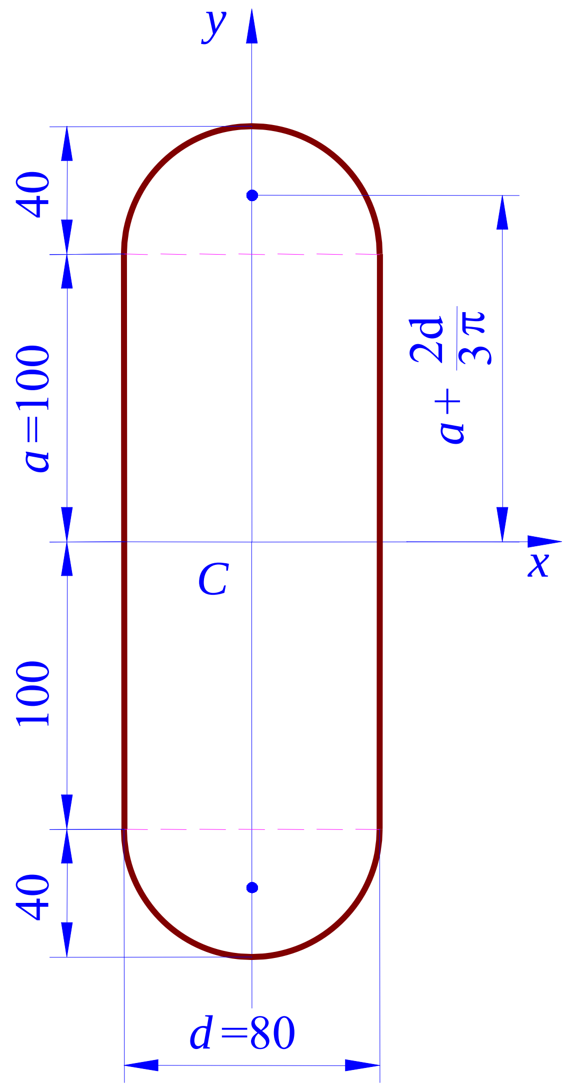
$$I_x=\frac{\pi d^4/64}{2}=\frac{\pi d^4}{128}$$



由平行移轴公式得：

$$I_{x_c}=I_x-(y_c)^2\cdot\frac{\pi d^2}{8}=\frac{\pi d^4}{128}-\frac{d^4}{18\pi}$$

例 试求图a 所示截面对于对称轴 x 的惯性矩。



(a)

解： 将截面看作一个矩形和两个半圆组成。

1、矩形对 x 轴的惯性矩：

$$I_{x1}=\frac{d(2a)^3}{12}=\frac{80\times200^3}{12}$$

$$=5333\times10^4\,\mathrm{mm}^4$$

2、一个半圆对其自身形心轴 x_c 轴的惯性矩（见上例）

$$I_{x_c}=I_x-(y_c)^2\cdot\frac{\pi d^2}{8}=\frac{\pi d^4}{128}-\frac{d^4}{18\pi}$$

3、一个半圆对 x 的惯性矩

由平行移轴公式得：

$$I_{x2}=I_{x_c}+\left(a+\frac{2d}{3\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi d^2}{8}$$

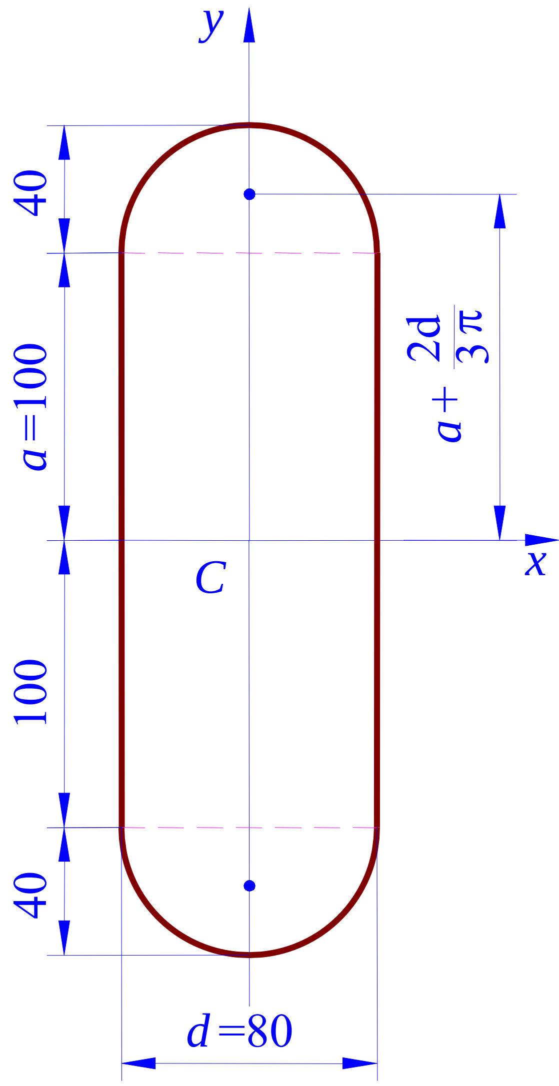
$$=\frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d^2}{32}+\frac{a^2}{2}+\frac{2ad}{3\pi}\right)=3467\times10^4\,\text{mm}^4$$

4、整个截面对于对称轴 x 的惯性矩：

$$I_x=I_{x1}+2I_{x2}$$

$$=5333\times10^4+2\times3467\times10^4$$

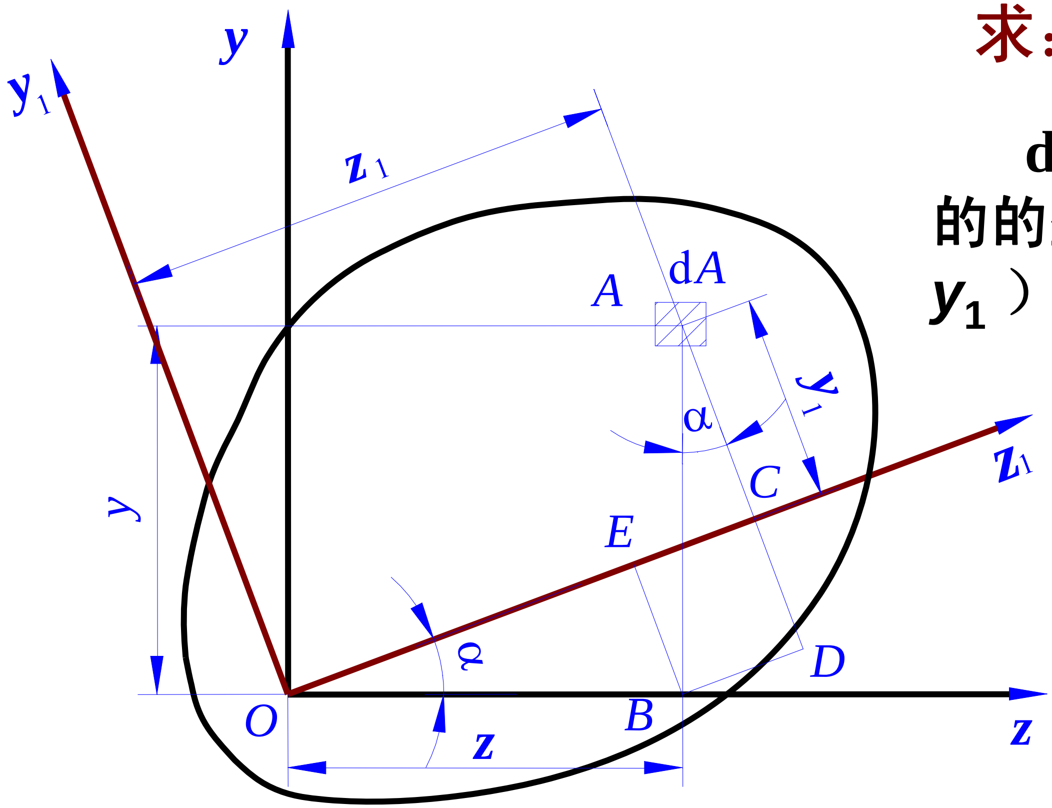
$$=12270\times10^4\,\text{mm}^4$$



(a)

§A-4　转轴公式

一、惯性矩和惯性积的转轴公式



已知：A、I_z、I_y、I_{zy}、 α 。

求：I_{z1}、I_{y1}、I_{z1y1}。

dA 在坐标系 ozy 和坐标系oz_1y_1的的坐标分别为（z，y ）和（z_1，y_1 ）

$$z_1 = z\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$y_1 = y\cos\alpha - z\sin\alpha$$

代入惯性矩的定义式：

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 \mathrm{d}A$$

$$I_{z_1}=\int_A y_1^2\,\mathrm{d}A$$

$$I_{z_1}=\cos^2\alpha\int_A y^2\,\mathrm{d}A+\sin^2\alpha\int_A z^2\,\mathrm{d}A-2\sin\alpha\cos\alpha\int_A zy\,\mathrm{d}A$$

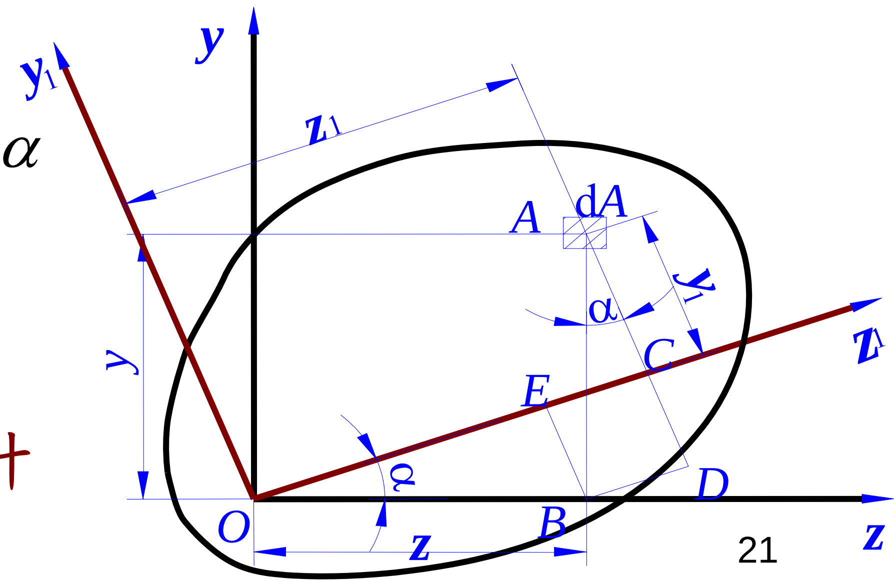
$$=I_z\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-2I_{zy}\sin\alpha\cos\alpha$$

利用二倍角函数代入上式，得 转轴公式 ：

$$I_{z_1}=\frac{I_z+I_y}{2}+\frac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha-I_{zy}\sin 2\alpha$$

$$I_{y_1}=\frac{I_z+I_y}{2}-\frac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha+I_{zy}\sin 2\alpha$$

$$I_{z_1y_1}=\frac{I_z-I_y}{2}\sin 2\alpha+I_{zy}\cos 2\alpha$$

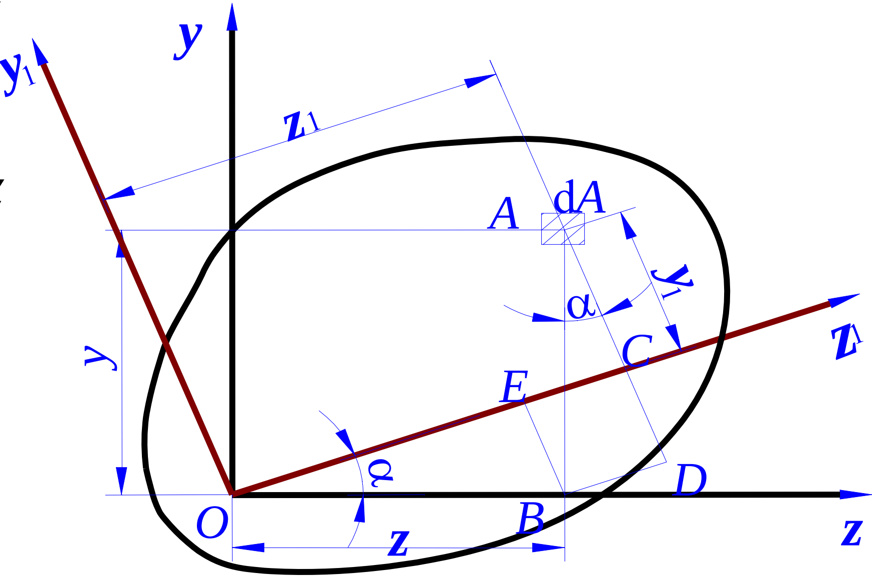


α 的符号为：从 z 轴至 z_1 轴 逆时针为正，顺时针为负。

$$I_{z_1}=\frac{I_z+I_y}{2}+\frac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha-I_{zy}\sin 2\alpha$$

$$I_{y_1}=\frac{I_z+I_y}{2}-\frac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha+I_{zy}\sin 2\alpha$$

$$I_{z_1y_1}=\frac{I_z-I_y}{2}\sin 2\alpha+I_{zy}\cos 2\alpha$$



将前两式相加得

$$I_{z_1}+I_{y_1}=I_z+I_y$$

上式表明，截面对于通过同一点的任意一对相互垂直的坐标轴的惯性矩之和为一常数，并等于截面对该坐标原点的极惯性矩

$$I_{z1}=\frac{I_z+I_y}{2}+\frac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha-I_{zy}\sin 2\alpha$$

$$I_{y1}=\frac{I_z+I_y}{2}-\frac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha+I_{zy}\sin 2\alpha$$

$$I_{z1y1}=\frac{I_z-I_y}{2}\sin 2\alpha+I_{zy}\cos 2\alpha$$

§A-5　主惯性轴、主惯性矩、形心主惯性矩

$$\frac{dI_{z1}}{d\alpha}=-2\frac{I_z-I_y}{2}\sin 2\alpha-2I_{zy}\cos 2\alpha$$

$$=-2\left(\frac{I_z-I_y}{2}\sin 2\alpha+I_{zy}\cos 2\alpha\right)=-2I_{z1y1}$$

令　$\alpha=\alpha_0$　$\left.\frac{dI_{z1}}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=0$

$$\left.\frac{dI_{z1}}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=-2\frac{I_z-I_y}{2}\sin 2\alpha_0-2I_{zy}\cos 2\alpha_0=-2I_{z_0y_0}=0$$

$$\Longrightarrow \quad tg2\alpha_0=\frac{-2I_{zy}}{I_z-I_y}$$

可求得 α_0 和 α_0+90° 两个角度，从而确定两根轴 y_0,，z_0。

$$\text{且}\ I_{z_0y_0}=0$$

由 $tg2\alpha_0=\dfrac{-2I_{zy}}{I_z-I_y}$ 求出 $\sin 2\alpha_0,\cos 2\alpha_0$ 代入转轴公式可得：

$$I_{\substack{\max\\ \min}}=I_{\substack{z0\\ y0}}=\frac{I_z+I_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_z-I_y}{2}\right)^2+I_{zy}{}^2}$$

由此引出几个概念：

1、主惯性轴（主轴）：

如果图形对过某点的某一对坐标轴的惯性积为零，则该对轴为图形过该点的主惯性轴。（ $I_{z_0 y_0}=0$， y_0， z_0 轴为主轴）。

2、主惯性矩（主矩）：

图形对主轴的惯性矩 I_{z0}、I_{y0} 称为主惯性矩，主惯性矩为图形对过该点的所有轴的惯性矩中的最大和最小值。

3、形心主惯性轴（形心主轴）：

如果图形的两个主轴为图形的形心轴，则此两轴为形心主惯轴。（I_{zcyc}= 0。 z_c、y_c 为形心轴。z_c、y_c 为形心主轴）。

4、形心主惯性矩：

图形对形心主轴的惯性矩。（I_{zc}、I_{yc}）。

5、求截面形心主惯性矩的基本步骤

1)、建立坐标系。

2)、求形心位置。

$$\begin{cases} z_c = \dfrac{S_y}{A} = \dfrac{\sum A_i z_{ci}}{A} \\ y = \dfrac{S_z}{A} = \dfrac{\sum A_i y_{ci}}{A} \end{cases}$$

3)、建立形心坐标系；并求：I_{yc}，I_{zc}，I_{zcyc}，

4)、确定形心主轴位置——α_0：

$$tg2\alpha_0 = \frac{-2I_{zy}}{I_z - I_y}$$

5)、求形心主惯性矩

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = I_{\substack{zc0 \\ yc0}} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^{\ 2}}$$

6、几个结论

- 若截面有一根对称轴，则此轴即为形心主惯性轴之一，另一形心主惯性轴为通过形心并与对称轴垂直的轴。

- 若截面有二根对称轴，则此二轴即为形心主惯性轴。

- 若截面有三根对称轴，则通过形心的任一轴均为形心主惯性轴，且主惯性矩相等。