复曲线中插缓和曲线弧长的初值

回旋线型缓和曲线上任意一点的坐标及其回旋角可表示为

$$x=l-\frac{l^5}{40C^2}+\frac{l^9}{3456C^4}-\cdots\cdots \qquad (1)$$

$$y=\frac{l^3}{6C}-\frac{l^7}{336C^3}+\frac{l^9}{42240C^5}-\cdots\cdots \qquad (2)$$

$$\beta=\frac{l^2}{2C} \qquad (3)$$

如果设 R_1> R_2并设中插缓和曲线的起点至半径为 R_1那一点的长度为 l_F、起点至半径为 R_2那一点的弧长为 l_M，因缓和曲线的曲率变化率 $C=l_F\times R_1=l_M\times R_2$，所以有

$$l_F=\frac{l_M\cdot R_2}{R_1}$$

在中插缓和曲线上，半径为 R_1那一点的回旋角为

$$\beta_F=\frac{R_2}{2R_1^2}\ l_M \qquad (4)$$

半径为 R_2那一点的回旋角为

$$\beta_M=\frac{l_M}{2R_2} \qquad (5)$$

要插入复曲线中缓和曲线插入段的偏角为式(5)减式(4)，即

$$\beta_{FM}=\frac{R_1^2-R_2^2}{2R_1^2R_2}\ l_M \qquad (6)$$

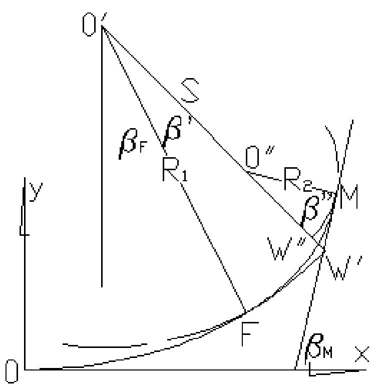

图1

在中插缓和曲线上，设半径为 R_1那一点的坐标为(x_F，y_F)；半径为 R_2那一点的坐标为(x_M，y_M)，如图1。那么，大、小圆的圆心0’及0”点的坐标可表示如下

$$0_x'=x_F-R_1\times \mathrm{Sin}\,\beta_F \qquad (7)$$

$$0_y'=y_F+R_1\times \mathrm{Cos}\,\beta_F \qquad (8)$$

$$0_x''=x_M-R_2\times \mathrm{Sin}\,\beta_M \qquad (9)$$

$$0_y''=y_M+R_2\times \mathrm{Cos}\,\beta_M \qquad (10)$$

以共用径向线为界，大、小圆的中插角β’、β”分别为

$$\beta'=\mathrm{arctg}\frac{0x''-0x'}{0y'-0y''}-\beta_F \qquad (11)$$

$$\beta''=\beta_{FM}-\beta' \qquad 12)$$

由于圆心0′及0″的坐标[1]又可表示为

$$0_x'=\frac{R_2l_M}{2R_1}-\frac{(R_2l_M)^3}{240R_1^5}+\frac{(R_2l_M)^5}{34560R_1^9} \qquad (13)$$

$$0_y'=R_1+\frac{(R_2l_M)^2}{24R_1^3}-\frac{(R_2l_M)^4}{2688R_1^7}+\frac{(R_2l_M)^6}{506880R_1^{11}} \qquad (14)$$

$$0_x''=\frac{l_M}{2}-\frac{l_M^3}{240R_2^2}+\frac{l_M^5}{34560R_2^4} \qquad (15)$$

$$0_y''=R_2+\frac{l_M^2}{24R_2}-\frac{l_M^4}{2688R_2^3}+\frac{l_M^6}{506880R_2^5} \qquad (16)$$

当式(13)～式(16)仅取第一项时有

$$0_x''-0_x'\approx\frac{l_M}{2}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$0_y'-0_y''\approx R_1-R_2$$

$$\beta'\approx\mathrm{arctg}\left[\frac{\frac{l_M}{2}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)}{R_1-R_2}\right]-\beta_F$$

$$\approx\mathrm{arctg}\left[\frac{l_M}{2R_1}\right]-\beta_F \qquad (17)$$

又因

$$\mathrm{arctg}\frac{l_M}{2R_1}=\frac{l_M}{2R_1}-\frac{l_M^3}{3(2R_1)^3}+\frac{l_M^5}{5(2R_1)^5}-\cdots\cdots$$

而且$(l_M/2R_1)$通常为比较小的小数，当舍去$(l_M/2R_1)^3/3$及以后的项目，并将式(4)代入其中后，式(17)又可写成

$$\beta' \approx \frac{l_M}{2R_1} - \frac{R_2 l_M}{2R_1^2} = \frac{R_1-R_2}{2R_1^2} l_M \quad (18)$$

将式(6)变成

$$l_M = \frac{2R_1^2R_2}{R_1^2-R_2^2}\beta_{FM}$$

并代入式(18)有

$$\beta' \approx \frac{R_2}{R_1+R_2}\beta_{FM} \quad (19)$$

将式(19)代入式(12)有

$$\beta'' \approx \frac{R_1}{R_1+R_2}\beta_{FM} \quad (20)$$

将式(6)代入式(19)及式(20)上两式又可写成

$$\beta' \approx \frac{R_1-R_2}{2R_1^2} l_M \quad (21)$$

$$\beta'' \approx \frac{R_1-R_2}{2R_1R_2} l_M \quad (22)$$

仔细分析式(17)～式(22)的演变过程也不难看出，按式(19)、(21)计算出的β′是比精确值略大的近似值。与此相反，按式(20)、(22)计算出的β″则是比精确值略小的近似值。

设Δβ是β′精确值与近似值之差的绝对值，那么，式(21)又可以改写成

$$\beta' = \frac{R_1-R_2}{2R_1^2} l_M - \Delta\beta \quad (23)$$

式(22)则可以改写成

$$\beta'' = \frac{R_1-R_2}{2R_1R_2} l_M + \Delta\beta \quad (24)$$

设大圆的偏角为α_1，旁插缓和曲线的回旋角为β_{01}，圆曲线的最小长度为l_{y1}，那么在大圆中，能插入缓和曲线部分的最大角度(可插角)为

$$\beta_{k1} = \frac{\alpha_1-\beta_{01}}{180}\pi - \frac{l_{y1}}{R_1}$$

当令大圆的中插角β′等于其可插角β_{k1}时，就可以写出中插缓和曲线弧长的计算式，即

$$l_M = \left(\frac{\alpha_1-\beta_{01}}{180}\pi - \frac{l_{y1}}{R_1} + \Delta\beta\right)\frac{2R_1^2}{R_1-R_2}$$

略去等式右边的Δβ后，上式可变为

$$l_M \approx \left(\frac{\alpha_1-\beta_{01}}{180}\pi - \frac{l_{y1}}{R_1}\right)\frac{2R_1^2}{R_1-R_2} \quad (25)$$

按式(25)计算出的l_M即为略小于精确值的初值。

设小圆的偏角为α_2，旁插缓和曲线的回旋角为β_{02}，圆曲线的最小长度为l_{y2}，那么在小圆中，能插入缓和曲线部分的最大角度(可插角)为

$$\beta_{k2} = \frac{\alpha_2-\beta_{02}}{180}\pi - \frac{l_{y2}}{R_2}$$

当令小圆的中插角β″等于其可插角β_{k2}时，又可以写出中插缓和曲线弧长的另一计算式，即

$$l_M \approx \left(\frac{\alpha_2-\beta_{02}}{180}\pi - \frac{l_{y2}}{R_1} - \Delta\beta\right)\frac{2R_1R_2}{R_1-R_2}$$

略去等式右边的Δβ后，上式可变为

$$l_M \approx \left(\frac{\alpha_2-\beta_{02}}{180}\pi - \frac{l_{y2}}{R_1}\right)\frac{2R_1R_2}{R_1-R_2} \quad (26)$$

按式(26)计算出的l_M即为略大于精确值的初值。

式(25)与式(26)即分别为《复曲线中插缓和曲线计算三》与《复曲线中插缓和曲线计算二》应用程序的编程基础，在此初值基础之上，运用类似于迭代法的逐次逼近法，即能很快计算出所需要的弧长精确值。

参考文献

[1] 张坤宜,等;缓和复曲线中插缓和曲线弧长的直接精确解,[B],公路,2004年,第8期