三次抛物缓和曲线的使用限制

摘　要 通过对三次抛物线缓和曲线计算公式的分析，证实该计算公式存在使用限制问题，并给出了受限制的具体数据

关键词 三次抛物线　缓和曲线　计算公式　使用限制

一、引言

缓和曲线的设置，即是要在直线与圆曲线之间，采用一段过渡曲线。使过渡段起点的曲率半径等于∞，随着接近圆曲线，曲率半径逐渐减小，到与圆曲线连接处，缓和曲线的曲率半径等于圆曲线的半径。

缓和曲线的类型很多。铁路设计规范要求在铁路设计中使用三次抛物线型缓和曲线。高等级公路设计中，三次抛物线型缓和曲线也被广泛地利用。对称三次抛物线缓和曲线的计算方法，在所列参考文献中已做了详细的介绍。

大量计算表明，使用文献[1]的计算方法，当三次抛物缓和曲线的长度较大，如接近或超过 0.7R 时，缓和曲线终点以前有一小段，其曲率半径反而小于其终点的半径 R。即使把文献[1]式(6)、式(7)的级数再增加两项，所述的问题依然存在。如果忽略这一点，按所计算的(x, y)坐标值设置缓和曲线，有可能达不到预期的效果。

那么文献[1]介绍的计算方法是否有限制？本文将主要分析这一问题。

二、公式分析

为了定量分析所述问题，还要从三次抛物线方程

$$y=\frac{x^3}{6C} \tag{1}$$

着手。按式(1)，三次抛物线上任意一点的转向角为

$$\tan\beta = y' = \frac{x^2}{2C},\quad \beta = \arctan\left(\frac{x^2}{2C}\right) \tag{2}$$

曲率半径为

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{C\times\left(1+\frac{x^4}{4C^2}\right)^{3/2}}{x} \tag{3}$$

弧长方程为

$$l = x\left(1+\frac{x^4}{40C^2}-\frac{x^8}{1152C^4}+\frac{x^{12}}{13312C^6}-\frac{x^{16}}{111411.2C^8}+\frac{x^{20}}{786432C^{10}}-\frac{x^{24}}{104857600C^{12}}\right) \tag{4}$$

式(3)可以改写为

$$\rho = C\times\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3x^2}{4C^2}+\frac{3x^6}{16C^4}+\frac{x^{10}}{64C^6}\right)^{1/2} \tag{5}$$

设函数

$$f(x) = \frac{1}{x^2}+\frac{3x^2}{4C^2}+\frac{3x^6}{16C^4}+\frac{x^{10}}{64C^6}$$

则式(5)可以改写为

$$\rho = C\times[f(x)]^{1/2}$$

如果三次抛物线上存在曲率半径小于其终点连接圆曲线的半径 R，那么曲率半径的最小值应在使上式的一阶导数为 0 时出现。由于下式

$$\rho' = C\times((f(x))^{1/2})' = C\times\frac{f'(x)}{2(f(x))^{1/2}} = 0$$

中 $C\neq0$ 以及 $2(f(x))^{1/2}\neq0$，只能是 $f'(x)=0$，也即

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}+\frac{6x}{4C^2}+\frac{18x^5}{16C^4}+\frac{10x^9}{64C^6} = 0 \tag{6}$$

或

$$-2+6\left(\frac{x^2}{2C}\right)^2+18\left(\frac{x^2}{2C}\right)^4+10\left(\frac{x^2}{2C}\right)^6=0 \tag{7}$$

令

$$u=\left(\frac{x^2}{2C}\right)^2$$

则式(7)可改写成

$$u^3+1.8u^2+0.6u-0.2=0。$$

上式是一个典型的三次方程，解此方程得 u=0.2，也即

$$\left(\frac{x^2}{2C}\right)^2=0.2,\quad \frac{x^2}{2C}=0.447213595 \qquad (8)$$

将式(8)代入式(2)得β=24°5′41.43″。将式(8)代入式(4)得 l=1.019479644x。这个 l 应是缓和曲线曲率半径处于最小值时的缓和曲线长度。若将式(8)代入式(3)并令此时计算出的曲率半径等于R，则有

$$R=\frac{1.314534138C}{x} \qquad (9)$$

用 l=1.019479644x 除以式(9)可得

$$\frac{l}{R}=\frac{1.019479644x^2}{1.314534138C}$$

再将式(8)变为 x^2=2×0.447213595C 代入上式，可得缓和曲线曲率半径处于最小值时，缓和曲线的长度与其终点曲率半径的比值 l/R=0.693668。

从以上分析说明，文献[1]所介绍的三次抛物线型缓和曲线，当其转向角达到24°5′41.43″时，或 l/R=0.693668 时，曲率半径达到最小值。若 l/R>0.693668 时，转向角将超过24°5′41.43″，曲率半径则有所增大。

三、算例

1. 圆曲线的半径 R=100m，当缓和曲线的长度 l=70m 时的计算结果(1～65 被略去)：

x	y
…	…
x(66)= 64.9449	y(66)= 8.8225
x(67)= 65.8691	y(67)= 9.2045
x(68)= 66.7894	y(68)= 9.5957
x(69)= 67.7057	y(69)= 9.9961
x(70)= 68.618	y(70)= 10.4056

β	ρ
…	…
β(66)= 22.17266379	ρ(66)= 100.3332
β(67)= 22.74425091	ρ(67)= 100.157
β(68)= 23.31666462	ρ(68)= 100.0435
β(69)= 23.8895512	**ρ(69)= 99.9915**
β(70)= 24.46256188	ρ(70)= 100

从该例的计算结果可以看出，缓和曲线终点的转角β(70)=24°27′45.22″>24°5′41.43″，故所计算出的结果不可能正确。

2. 圆曲线的半径 R=100m，当缓和曲线的长度 l=69m 时的计算结果(1～64 被略去)：

x	y
…	…
x(65)= 64.0173	y(65)= 8.4484
x(66)= 64.9452	y(66)= 8.8211
x(67)= 65.8694	y(67)= 9.2031
x(68)= 66.7897	y(68)= 9.5942
x(69)= 67.7061	y(69)= 9.9946

β	ρ
…	…
β(65)= 21.59917819	ρ(65)= 100.5834
β(66)= 22.169526	ρ(66)= 100.3427
β(67)= 22.74105997	ρ(67)= 100.1661
β(68)= 23.31342237	ρ(68)= 100.0523
β(69)= 23.88625955	ρ(69)= 100

从该例的计算结果可以看出，缓和曲线终点的转角β(69)=23°53′10.53″<24°5′41.43″，故所计算出的结果符合设置缓和曲线的要求。

四、结语

从以上算例以及对计算公式的分析可以看出，文献[1]所介绍的三次抛物线缓和曲线计算方法在使用上存在限制。其限制为：**按设定的圆曲线半径R、缓和曲线长 l 所计算出的缓和曲线终点转角 $β_0$ 不应大于24°5′41.43″，或缓和曲线长度 l 与其终点曲率半径的比值不应大于0.693668。**当所计算出的 $β_0$>24°5′41.43″时，或 l/R>0.693668 时，应调整所设定的R、l，使其满足要求。

参考文献

[1]顾大军，三次抛物线缓和曲线的计算，新疆有色金属，2009.32（z1）

[2]王国栋等，铁路三次抛物线缓和曲线的计算，交通科技与经济，2011年第1期