

# 等截面薄壁箱梁剪力滞效应的能量变分法解

邹永红<sup>1</sup>, 杨 华<sup>1</sup>, 赵 华<sup>2</sup>, 达 帆<sup>1</sup>

(1. 中国市政工程西南设计研究院 成都市 610081; 2. 成都市公路规划勘察设计院 成都市 610035)

**摘 要:** 在用能量变分法求解薄壁箱梁的剪力滞问题时, 不同于以往假设箱梁的上顶板、悬臂板和下底板具有相同的纵向位移转角差函数, 采用了三个不同的纵向位移转角差函数来反映薄壁箱梁不同宽度翼板的剪滞变化幅度, 通过变分原理建立了薄壁箱梁弯曲变形的控制微分方程, 并获得相应的解析解。结果与采用相同位移差函数的解析解和 ANSYS 有限元计算进行比较分析, 验证了本文方法更合理。

**关键词:** 薄壁箱形梁; 剪力滞效应; 能量变分原理

箱梁截面具有良好的抗弯、抗扭性能, 便于现代化施工等优点, 被广泛地应用于国内外的桥梁建设上。腹板间距较大的宽箱梁承受对称弯曲荷载时, 翼板将产生剪切变形, 导致翼板上的正应力沿宽度方向呈不均匀分布。剪力流在横向传递过程中有滞后现象, 称为剪力滞效应。使用初等梁理论计算得到的应力与考虑剪力滞效应求得的结果有较大的出入, 忽略这种影响, 将会造成工程结构设计的不安全。近年来, 国内外许多学者致力于该课题的研究, 从解析理论、数值解法和模型试验等方面对剪力滞问题提出了许多新设想和新理论。其中能量变分法是从假定箱梁翼板的纵向位移模式出发, 以梁的竖向位移和描述翼板剪力滞的纵向位移差的广义位移函数为未知数, 应用最小势能原理, 建立控制微分方程, 从而得到挠度和应力的解析解。此法简单实用, 与实测的结果较符合, 得到普遍的重视和应用。

## 1 基本假定

箱梁的截面参数以及坐标如图 1 所示。坐标原点取为截面的形心, 考虑到翼板宽度的不同, 假设翼板的纵向位移沿横向按 3 次抛物线分布, 上顶板、悬臂板和下底板采用不同的纵向位移转角差函数。

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{顶}}(x, y) &= h_1 \left| \frac{dw(x)}{dx} + \left(1 - \frac{y^3}{b_1^3}\right) u_1(x) \right| \\ &\quad -b_1 \leq b \leq b_1 \\ u_{\text{悬}}(x, y) &= h_2 \left| \frac{dw(x)}{dx} + \left(1 - \frac{y^3}{b_2^3}\right) u_2(x) \right| \\ &\quad -b_2 \leq b \leq b_2 \\ u_{\text{底}}(x, y) &= h_3 \left| \frac{dw(x)}{dx} + \left(1 - \frac{y^3}{b_3^3}\right) u_3(x) \right| \\ &\quad -b_3 \leq b \leq b_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

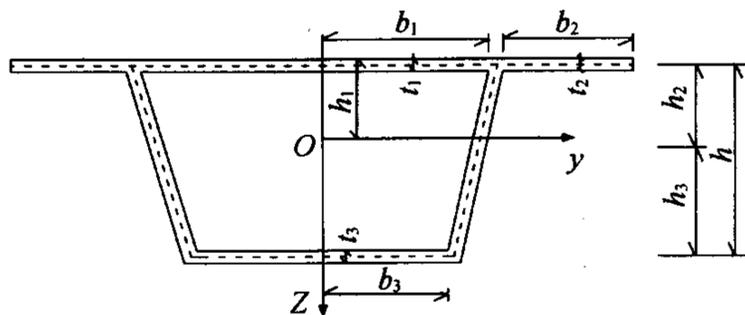


图 1 截面几何参数及坐标系

式中:  $w(x)$  为梁的竖向挠度;  $u_i(x)$  为翼板纵向位移转角差函数;  $h_i$  为翼板中面至梁中性轴的距离;  $b_i$  为翼板宽度的一半。

对于腹板部分, 仍采用平截面假定, 不考虑腹板的剪切变形。对上下翼板, 板的竖向纤维不受挤压, 即  $\epsilon_z = 0$ 。板平面外的剪切变形  $\gamma_{xy}$  及横向应变  $\gamma_{yz}$  均很小, 可忽略不计。

## 2 控制微分方程的推导

根据最小势能原理, 在外力作用下, 处于稳定平

衡状态的弹性体,体系总势能的一阶变分为零,即:

$$\delta = \delta(\bar{U} + \bar{V}) = 0 \tag{2}$$

式中: $\bar{U}$  为体系的形变势能; $\bar{V}$  为体系的荷载势能。

### 2.1 梁的荷载势能

在不考虑梁的弯曲剪切变形情况下,梁的外力势能为:

$$\bar{V} = - \int M(x)w''(x)dx \tag{3}$$

### 2.2 梁的各项形变势能

(1)腹板应变能。

$$\bar{U}_w = \frac{1}{2} \int EI_w (w'')^2 dx \tag{4}$$

(2)上下翼板应变能。

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{2} \iint t_1 (E\epsilon_{x1}^2 + G\lambda_{xy1}^2) dx dy$$

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{2} \iint t_2 (E\epsilon_{x2}^2 + G\lambda_{xy2}^2) dx dy \tag{5}$$

$$\bar{U}_3 = \frac{1}{2} \iint t_3 (E\epsilon_{x3}^2 + G\lambda_{xy3}^2) dx dy$$

带入几何方程:

$$\epsilon_{xi} = \frac{\delta u_i(x,y)}{\delta x} \quad \gamma_{xyi} = \frac{\delta u_i(x,y)}{\delta y} \quad (i = 1, 2, 3)$$

则有:

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{2} EI_1 \int \left[ (w'')^2 + \frac{3}{2} w'' u_1(x)' + \frac{9}{14} u_1'(x)^2 + \frac{9G}{5Eb_1^2} \cdot u_1(x)^2 \right] dx$$

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{2} EI_2 \int \left[ (w'')^2 + \frac{3}{2} w'' u_2(x)' + \frac{9}{14} u_2'(x)^2 + \frac{9G}{5Eb_2^2} \cdot u_2(x)^2 \right] dx \tag{6}$$

$$\bar{U}_3 = \frac{1}{2} EI_3 \int \left[ (w'')^2 + \frac{3}{2} w'' u_3(x)' + \frac{9}{14} u_3'(x)^2 + \frac{9G}{5Eb_3^2} u_3 \cdot (x)^2 \right] dx$$

### 2.3 系统的总势能

$$\begin{aligned} \Pi &= \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \bar{U}_w + \bar{V} \\ &= \frac{EI}{2} \int \left[ (w'')^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{3}{2} \alpha_i w'' u_i'(x) + \sum_{i=1}^3 \frac{9}{14} \alpha_i [u_i'(x)]^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{9G}{5E} \cdot \frac{\alpha_i}{b_i^2} [u_i(x)]^2 \right] dx + \int M(x)w''(x)dx \end{aligned} \tag{7}$$

以上各式中: $M(x)$ 为梁截面的弯矩; $E$ 、 $G$ 分别为材料的弹性模量和剪切模量; $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$ 分别为上顶板、悬臂板和下底板的厚度; $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 分别为上顶板、

悬臂板和下底板忽略自身惯性矩时对截面形心轴的惯性矩; $\alpha_i = I_i/I, i = 1, 2, 3$ ;  $I_w$ 为腹板惯性矩; $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_w$ ,为梁截面的惯性矩。

根据变分原理,  $\delta \Pi = 0$ , 通过分部积分, 最后得到弹性控制微分方程和边界条件:

$$M(x) + EIw'' + \sum_{i=1}^3 \frac{3}{4} EI\alpha_i u_i'(x) = 0 \tag{8}$$

$$EI\alpha_i \left[ -\frac{3}{4} W'' - \frac{9}{14} u''(x) + \frac{9G}{5Eb_i^2} \cdot u_i(x) \right] = 0 \tag{9}$$

( $i = 1, 2, 3$ )

$$EI\alpha_i \left[ \frac{9}{14} u' + \frac{3}{4} w'' \right] \delta u_i \Big|_0^L = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

式(8)、式(9)就是利用变分法得到的箱梁考虑剪滞效应的控制微分方程。式(10)是变分所要求的边界条件。

### 3 微分方程的求解

整理微分方程式(8)、式(9), 最后写成矩阵形式并化简得到:

$$\begin{bmatrix} u_1''(x) \\ u_2''(x) \\ u_3''(x) \end{bmatrix} - \frac{14G}{5E} \cdot \frac{1}{8-7\alpha} \cdot \begin{bmatrix} \frac{8-7\alpha_2-7\alpha_3}{b_1^2} & \frac{7\alpha_2}{b_2^2} & \frac{7\alpha_3}{b_3^2} \\ \frac{7\alpha_1}{b_1^2} & \frac{8-7\alpha_1-7\alpha_3}{b_2^2} & \frac{7\alpha_3}{b_3^2} \\ \frac{7\alpha_1}{b_1^2} & \frac{7\alpha_2}{b_2^2} & \frac{8-7\alpha_1-7\alpha_2}{b_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{bmatrix} = \frac{28Q(x)}{3EI} \cdot \frac{1}{8-7\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中:  $\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 整理微分方程式(8)、式(10)得:

$$w'' = - \left( \frac{M(x)}{EI} + \frac{3}{4} \cdot \frac{I_s}{I} \cdot u_i(x) \right) \tag{12}$$

$$EI\alpha_i \left[ \frac{9}{14} u_i'(x) + \frac{3}{4} w'' \right] \delta u_i \Big|_0^L = 0 \tag{13}$$

式中:  $I_s = I_1 + I_2 + I_3, I = I_1 + I_2 + I_3 + I_w$  ( $i = 1, 2, 3$ ; 变分边界条件)。

$M_F = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_s}{I} u_i(x)$ , 称为附加弯矩, 它是由剪力滞效应而产生的。它是剪切转角最大差值  $u(x)$  的一阶导数的函数, 而且与翼板的弯曲刚度成正比。

从式(11)可以看出, 考虑剪力滞影响后, 梁的曲

率与弯矩的关系已经不是初等梁理论  $w' = \frac{M(x)}{EI}$  的关系,而是增加了附加弯矩的修正项。由于剪力滞的影响使翼板的有效刚度降低,使梁的挠度增大。

对方程式(11)进行降阶处理,设  $\beta_1(x) = u_1(x), \beta_2(x) = u_2'(x), \beta_3(x) = u_3'(x)$ 。令矩阵

$$A = \frac{14G}{5E} \cdot \frac{1}{8-7\alpha_s} \cdot \begin{bmatrix} \frac{8-7\alpha_2-7\alpha_3}{b_1^2} & \frac{7\alpha_2}{b_2^2} & \frac{7\alpha_3}{b_3^2} \\ \frac{7\alpha_1}{b_1^2} & \frac{8-7\alpha_1-7\alpha_3}{b_2^2} & \frac{7\alpha_3}{b_3^2} \\ \frac{7\alpha_1}{b_1^2} & \frac{7\alpha_2}{b_2^2} & \frac{8-7\alpha_1-7\alpha_2}{b_3^2} \end{bmatrix}$$

则可转化为一阶线性非齐次常微分方程组,如下:

$$\begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_1'(x) \\ u_1'(x) \\ \beta_1'(x) \\ \beta_2'(x) \\ \beta_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ A & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \\ \beta_1(x) \\ \beta_2(x) \\ \beta_3(x) \end{bmatrix} +$$

$$\frac{28Q(x)}{3EI} \cdot \frac{1}{8-7\alpha_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对一阶线性非齐次常微分方程组的解析求解,可直接采用代定指数函数法,故方程通解可表示为

$$e^{Bx}C + e^{Bx} \int_0^x e^{-Bs} f(s) ds$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ A & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(s) = \frac{28Q(s)}{3EI} \cdot \frac{1}{8-7\alpha_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6]^T$  为常数向量。代入变分自然边界条件式(13)和结构边界条件,即

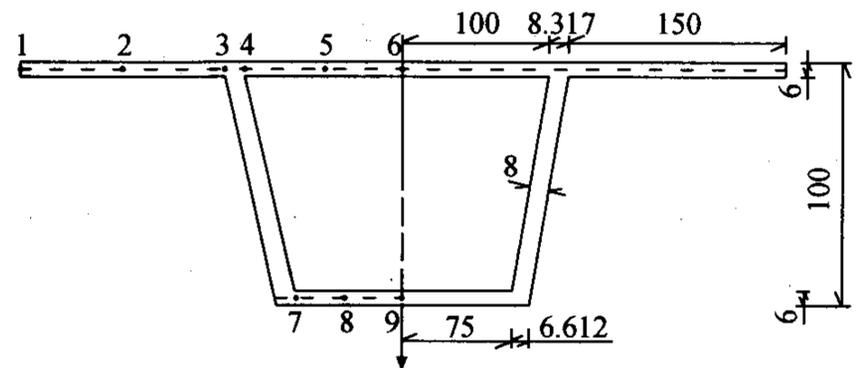
可解出  $C_1, C_2, \dots, C_6$ , 得到解析解。

求得  $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$  后,代入式(12),经过两次积分便可得到梁的竖向挠度。按下列公式可得到考虑剪力滞效应影响的翼板弯曲正应力:

$$\delta_x = E \frac{\delta u(x, y)}{\delta x} = Eh_i \left| \frac{M(x)}{EI} - \left(1 - \frac{y^3}{b_i^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{I_s}{I}\right) u_i'(x) \right| \quad (i=1, 2, 3) \quad (14)$$

### 4 算例分析与比较

图2所示的等截面箱梁为两端简支模型,跨径为80 cm,两端不设横隔板,弹性模量  $E = 3000 \text{ MPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.385$ ,荷载为满跨均布荷载  $q = 600 \text{ N/m}$ 。



单位:mm

图2 截面几何参数与计算点位置

通过Ansys有限元建模分析,模型采用Solid45三维实体单元,将梁跨划分为40段,共3040个单元,最后得到截面的应力计算结果。计算结果同文献的实测结果吻合较好。表1给出了采用本文变分法解和相同位移转角差函数解与ANSYS计算的结果比较。

表1 简支箱梁跨中截面应力结果比较

节点	本文变分法	相同位移转角差函数解	ANSYS解	误差1 %	误差2 %	
顶板	1	-0.133 9	-0.160 1	0.108 9	22.96	47.02
	2	-0.140 2	-0.163 1	0.141 9	1.20	14.94
	3	-0.184 5	-0.184 1	0.203 2	9.20	9.40
悬臂板	4	-0.184 5	-0.184 1	0.2050	10.00	10.20
	5	-0.162 9	-0.163 1	0.182 5	10.74	10.63
	6	-0.159 8	-0.160 1	0.177 9	10.17	10.01
底板	7	0.408 1	0.407 3	0.403 6	1.11	0.92
	8	0.380 8	0.360 8	0.381 9	0.29	5.53
	9	0.376 9	0.354 1	0.373 2	0.99	5.12

### 5 结论

通过假定3个不同的纵向位移差函数,使用能量变分法原理推导控制微分方程,理论上更加严谨、合理,经过有限元验证,结果吻合较好,证明本文假定的位移函数是正确和可靠的。并且当顶板、悬臂板和底板宽度相等时,可以得到与以往一样的公式,说明本文方法具有一般性。

对于目前采用的纵向位移转角差函数按3次抛物线变化,已能达到一定的精度要求和准确性,但并非预想中的理想。已有文献提出位移函数按4次或更高次的抛物线变化,对这方面还需要进一步的研究和探讨。

### 参考文献:

- [1] 张士铎,邓小华,王文州. 箱形薄壁梁剪力滞效应[M]. 北京:人民交通出版社,1998.
- [2] 郭金琼. 箱形梁设计理论[M]. 北京:人民交通出版社,1991.
- [3] 钱伟长. 微分方程理论及解法[M]. 北京:国防工业出版社,1992.
- [4] 罗旗帜,吴幼明. 薄壁箱梁剪力滞理论的评述和展望[J]. 佛山科学技术学院学报(自然科学版),2001,(9).
- [5] 罗旗帜. 薄壁曲箱梁桥剪滞效应分析[J]. 铁道学报,1999,(2).

## Energy-Variational Method of Shear Lag Effect in Constant Section Thin-Walled Box Girder

*ZOU Yong-hong<sup>1</sup>, YANG Hua<sup>1</sup>, ZHAO Hua<sup>2</sup>, DA Fan<sup>1</sup>*

(1. China Municipal Works Southwest Design and Research Institute, Chengdu 610081, China;

2. Highway Planning, Survey and Design Institute of Chengdu City, Chengdu 610035, China)

**Abstract:** In this paper, the shear lag effect in the thin-walled box girder are analyzed with energy-variational principle, considering three longitudinal displacement functions for constant section box girder with varying depth other than the same longitudinal displacement functions at the top, cantilever flanges and foot. On the basis of the energy-variational principle, the governing differential equations are derived and the closed-form solutions of the equations are obtained. The results show that the new method is more effective compared with that obtained from the same longitudinal displacement functions method and ANSYS.

**Key word:** thin-walled box girder; shear lag effect; energy-variational principle

### 云南平锁高速公路建成通车

近日,云南平远街至锁龙寺高速公路正式建成通车。

云南平远街至锁龙寺高速公路是国道主干线衡阳至南宁至昆明公路中位于云南省境内昆明至罗村口公路的重要路段,是云南省“三纵三横、九大通道”连接广西出海通边的主要通道。

为把平锁高速公路建设成为一条内实外美的风景大道,公路建设者将“百年大计,质量第一”的原则贯穿于公路建设过程中,并十分注重科技项目的研究和应用,其中隧道照明中新技术、新型节能设施最引人注目,隧道照明采用无极节能灯,光源呈白色,效果像白天的自然光线,并可节能20%。整个建设过程还加大了对环境保护的投入,对道路、桥梁、边坡、立交区、服务区都做到综合绿化、科学设置,特别是在沿线上挡墙和桥梁中间分隔带全部采用花池、花盆美化、绿化,使平锁高速公路成为与自然景观融为一体的美丽风景。