

# 边角后方交会与公路路线测设

钟正强<sup>1</sup>, 吴国忠<sup>2</sup>

(1. 长沙交通学院, 湖南 长沙 410076; 2. 湖南省益阳市公路管理局, 湖南 益阳 415001)

[摘要] 常规的交会定点方法对交会图形有一定的要求。本文讨论了边角同测的后方交会观测方法、计算原理和点位精度分析, 并通过理论和实例验证了该方法的可行性。本文所述方法具有操作简便、选点灵活和不受交会图形限制等优点。

[关键词] 交会定点; 公路测设; 精度

[中图分类号] U412.24; U495 [文献标识码] A [文章编号] 1002-120X(2003)01-0026-03

## Side Angle Resection and Route Reconnaissance

ZHONG Zheng-qiang<sup>1</sup>, WU Guo-zhong<sup>2</sup>

(1. Changsha Communications University, Changsha 410076, China;

2. Yiyang Bureau of Highway Administration, Yiyang 415001, China)

[Abstract] In view of figure restrains in normal resection, this paper discusses the side angle resection. Measuring, calculation, and point accuracy of the method are detailed with proven feasibility by theoretical analyses and experiments. This method has advantages of simplicity in operation, flexibility in point selection, and no restrains to intersection figure.

[Key words] side angle resection; route reconnaissance; accuracy of point position

测距仪、全站仪的普及,使得公路的测设手段也得到了改善,逐步从以经纬仪加钢(皮尺)的偏角法、切线支距法等过渡到以坐标法为主的测设方法。坐标法施测公路中线要有适当密度的路线控制点。然而在路线初测阶段沿路线走廊布设的路线导线控制点,其密度远远不能满足定测和施工放样的需要,常常要对其进行加密。常用的加密方法有前方交会、后方交会、侧方交会、边角交会和支导线法等。所有的交会方法都对交会图形都有一定的限制,同时还要有第三方向进行检测,而公路的线状几何特性和测设中控制点距中线不能太远,使得加密点(交会点)很难保证良好的几何形状。同时,自然地形的限制有时难满足待定点与第三点通视。虽然边角交会可在两通视的已知点上进行,但无检核,容易出现粗差,不能取得可靠的观测成果。基于此,笔者设想在边角交会中加测另一条边,或在测角后方交会中加测交会角(见图1),这样稍增加了观测量,但由于存在多余观测,使得观测成果具备了检核条件,从而大

大加强了交会点的可靠性,而且观测值增加,使得交

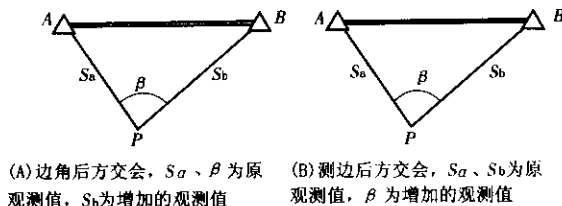


图1 边角同测后方交会

Figure 1 Side angle resection

会点的定位精度发生了本质的变化。理论分析表明,在大多数情况下,交会点的精度几乎与交会图形无关,这对公路路线施测是非常有利的。

### 1 计算原理

已知  $A$ 、 $B$  两点,其坐标设为  $(x_A, y_A)$ 、 $(x_B, y_B)$ ,  $P$  为待定点,现欲求  $P$  的坐标  $(x_P, y_P)$ ,则置仪于  $P$  点,观测  $P$  到两已知点  $A$ 、 $B$  距离  $S_a$ 、 $S_b$  和  $PA$ 、

$PB$  之夹角  $\beta$ , 见图 2。由于未知数个数仅为 2, 而观测数为 3, 存在一个多余观测, 观测值之间有一个条件, 即由观测值推出  $AB$  之间的距离与  $AB$  之间的已知距离应相等, 即:

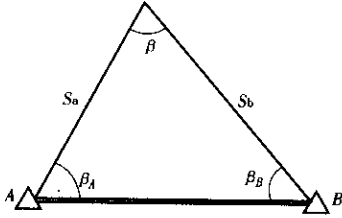


图 2 边角同测后方交会原理

Figure 2 Principle of side angle resection

$$S_0 = S'_0 \quad (1)$$

式中:  $S'_0$  为观测值的计算值;  $S_0$  为已知值, 可由已知点的坐标反算求得。计算值  $S'_0$  为:

$$S'_0 = (S_a + v_a)^2 + (S_b + v_b)^2 - 2(S_a + v_a)(S_b + v_b)\cos(\beta + v_\beta) \quad (2)$$

式中:  $v_a$ 、 $v_b$ 、 $v_\beta$  分别为观测值改正数。线性化后的条件式为:

$$\begin{aligned} & 2(S_a - S_b\cos\beta)v_a + 2(S_b - S_a\cos\beta)v_b + \\ & \frac{2S_aS_b\sin\beta}{\rho}v_\beta + \\ & (S_a^2 + S_b^2 - 2S_aS_b\cos\beta - S_0) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

令:  $a = 2(S_a - S_b\cos\beta)$ ,  $b = 2(S_b - S_a\cos\beta)$

$$c = 2S_aS_b\sin\beta/\rho, A = (a \ b \ c)$$

$$V = (v_a \ v_b \ v_c)^T, w = S_a^2 + S_b^2 - 2S_aS_b\cos\beta - S_0$$

则(3)可简写为:

$$AV + w = 0 \quad (4)$$

以角度测量的中误差为单位权中误差  $m_0$ , 依全站仪或测距仪的标称距离测量精度  $m_s = a + b \cdot D^{km}$  可确定观测值的先验权阵:

$$\begin{cases} p_\beta = \frac{m_0^2}{m_\beta^2} = 1 \\ p_a = \frac{m_\beta^2}{m_a^2} \\ p_b = \frac{m_\beta^2}{m_b^2} \end{cases} \quad \begin{cases} m_a = a + b \times S_a \\ m_b = a + b \times S_b \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{令: } P = \begin{pmatrix} P_a & & \\ & P_b & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则根据平差理论, 有联}$$

系数  $k$ :

$$k = (AP^{-1}A^T)^{-1}w = w / \left( \frac{a^2}{P_a} + \frac{b^2}{P_b} + c^2 \right) \quad (6)$$

从而各改正数为:

$$v_a = ak/p_a \quad v_b = bk/p_b \quad v_\beta = kc$$

各观测值的平差值为:

$$\begin{cases} S'_a = S_a + v_a \\ S'_b = S_b + v_b \\ \beta' = \beta + v_\beta \end{cases} \quad (7)$$

利用平差后的观测值, 按导线计算方法即可求得  $P$  点的坐标(参看图 2), 有:

$$\beta_A = \arcsin\left(\frac{S'_b\sin\beta'}{S_0}\right) \quad (8)$$

$$\alpha_{AB} = \arctg\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) \quad (9)$$

$$\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - \beta_A \quad (10)$$

$$\begin{cases} x_P = x_A + S_a\cos\alpha_{AP} \\ y_P = y_A + S_a\sin\alpha_{AP} \end{cases} \quad (11)$$

## 2 精度分析

严格地对  $P$  点的点位精度做出分析, 需要较多的平差知识和较大篇幅, 此处对其仅做一简要的分析。设起始点  $A$ 、 $B$  无误差, 由(11)式有:

$$\begin{cases} dx_P = \cos\alpha_{AP}dS_a + S_a\cos\alpha_{AP}\frac{d\alpha_{AP}}{\rho} \\ dy_P = \sin\alpha_{AP}dS_a - S_a\sin\alpha_{AP}\frac{d\alpha_{AP}}{\rho} \end{cases} \quad (12)$$

(12)式转化成中误差, 并代入点位中误差公式,  $m_p^2 = m_x^2 + m_y^2$  有:

$$m_p^2 = m_a^2 + \left(\frac{S_a}{\rho}\right)^2 \cdot m_{\alpha_{AP}}^2 \quad (13)$$

式中:  $m_a$  表示  $S_a$  的测距中误差;  $m_{\alpha_{AP}}$  为  $AP$  的方位角中误差。由于起始点无误差, 则:

$$\begin{aligned} d\alpha_{AP} &= -d\beta_A \\ d\beta_A &= \frac{1}{S_0\cos\beta_A} \left( \sin\beta dS_b + S_b\cos\beta \frac{d\beta}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式转化为中误差:

$$m_{\alpha_{AP}}^2 = m_\beta^2 = \left(\frac{\sin\beta}{S_0\cos\beta_A}\right)^2 \cdot m_b^2 + \left(\frac{S_b\cos\beta}{\rho S_0\cos\beta_A}\right)^2 \cdot m_\beta^2 \quad (15)$$

(15)中  $m_b$  为  $S_b$  的测距中误差,  $m_\beta$  为测角中误差。考虑到三角数关系式:

$$\frac{S_0}{\sin\beta} = \frac{S_a}{\sin\beta_B} = \frac{S_b}{\sin\beta_A} \text{ 则(15)式可简化为:}$$

$$\begin{aligned} m_\beta^2 &= (\tg\beta_A)^2 \cdot \left(\frac{m_b}{S_b}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \tg\beta_A \ctg\beta\right)^2 m_\beta^2 = \\ & (\tg\beta_A)^2 \left( \left(\frac{m_b}{S_b}\right)^2 + \left(\frac{\ctg\beta}{\rho}\right)^2 \cdot m_\beta^2 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

由于  $m_{\alpha AP} = m_{\rho}$  故由(3)(16)式知  $P$  点的中误差表达式为：

$$m_P^2 = m_a^2 + \left(\frac{S_a \operatorname{tg} \beta_A}{\rho}\right)^2 \left[\frac{m_b^2}{S_b^2} + \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\rho}\right)^2 m_{\beta}^2\right] \quad (17)$$

式中  $\frac{m_b}{S_b}$  为  $S_b$  的相对中误差,一般比较小,可忽略,则(17)式变为：

$$m_P^2 = m_a^2 + \left(\frac{S_a \operatorname{tg} \beta_A \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\rho^2}\right)^2 m_{\beta}^2 \quad (18)$$

实际工作中,  $\beta_A, \beta$  的角值一般在  $10^{\circ} \sim 170^{\circ}$  之间,而  $S_a$  也不会超过 500 m,因此(18)式第二项近似为 0,这时对  $P$  点的点位精度影响主要是测距误差,即可近似认为：

$$m_P = m_a \quad (19)$$

通过以上分析和(19)式可看出,在  $P$  点的点位误差中,量边误差占主导地位,而几乎与交会图形无关。同时,考虑到全站仪测距的一般精度评定公式  $m_s = a + bD$ ,  $P$  到已知点越远,误差越大。因此,可选择距  $P$  较近的点为起算点。

3 计算步骤

- ① 利用观测值计算边长闭合差
- $w = S_a^2 + S_b^2 - 2S_a S_b \cos \beta - S_0$
- ② 计算各改正项系数
- $a = \chi(S_a - S_b \cos \beta), b = \chi(S_b - S_a \cos \beta)$   
 $c = 2S_a - S_b \sin \beta / \rho, \rho = 206\,265''$
- ③ 计算观测值的权,  $p_{\beta} = 1, m_{\beta} = m_0$ , 为全站仪的标称测角精度。

$p_a = m_{\beta}^2 / m_a^2, \quad m_a = (a + b \times S_a^{\text{km}}) \text{mm}$   
 $p_b = m_{\beta}^2 / m_b^2, \quad m_b = (a + b \times S_b^{\text{km}}) \text{mm}$

- ④ 计算联系系数  $k$
- $k = -w / \left(\frac{a^2}{P_a} + \frac{b^2}{P_b} + c^2\right)$
- ⑤ 计算各改正数
- $v_a = ka / p_a, v_b = kb / p_b, v_c = kc$
- ⑥ 计算平差后的观测值
- $S'_a = S_a + v_a, S'_b = S_b + v_b, \beta' = \beta + v_{\beta}$
- ⑦ 利用(8~11)式求解  $P$  点的坐标。

4 算例

某一高精度导线的观测成果(见图 3),各点坐标已知(见表 1)。为检测本方法的正确性,置仪于  $P$  点,观测值为  $P$  点到  $A, B$  的距离和  $P$  点的交会角,各观测值分别为：

$S_a = PA = 345.153 \text{ m}$   
 $S_b = PB = 200.130 \text{ m}$   
 $\beta = \angle APB = 170^{\circ}39'22''$ 。全站仪的测角标称精度为  $5''$ ,测距中误差为  $5 + 5 \text{ ppm}$ ,利用 3 中计算步骤,各改正数为  $v_{\beta} = -3'', v_a = 4 \text{ mm}, v_b = 3 \text{ mm}$ ,  $P$  点的坐标为：

$x_p = 3\,071.801 \text{ m}, \quad y_p = 40\,548.392 \text{ m}$

计算值与已知点坐标相差仅 1 mm,这说明该方法是可行的。若以常规交会方法,则  $P$  点肯定落在危险圆内而导致  $P$  点的解不稳定。

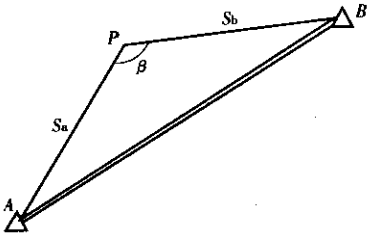


图 3 计算示例  
Figure 3 Calculation example

表 1 已知坐标  
Table 1 Known coordinates data

坐标/m	点 号		
	A	B	P
X	3 059.504	3 046.363	3 071.802
Y	40 203.454	40 746.902	40 548.393

5 结论

通过本文分析和实例结果验证,在两点边角两方交会中加测交会角(或边长)与其它交会方法相比,具有以下特点：

- ①  $P$  点的定位精度主要受测距误差的影响,而几乎与交会图形无关。这一点对公路路线坐标法施测极为有利；
- ② 待定点布设极为灵活,只要两个已知点,且已知点之间不需相用通视；
- ③ 虽然稍微增加了观测量,但却具有检核条件,保证了观测成果的可靠性。实际工作中,利用三角形闭合差也可作观测成果的初步检核。

[参考文献]

[1] 武汉测绘学院.测量学[M].武汉:测绘出版社,1991.6.  
[2] 於宗俦.测量平差基础[M].武汉:测绘出版社,1983.6.  
[3] 吴俊超,刘大杰.控制测量平差[M].武汉:测绘出版社,1985.