

# 待定点测角误差对点位的影响规律及其应用

许云燕

(郑州测绘学校,河南 郑州 450015)

**[摘要]** 分析了在待定点设站测角时,测角误差对点位的影响规律,包括大小和方向。通过在侧方交会法、角度后方交会法中的应用,初步展示了它在误差分析和归化值计算中的优势。

**[关键词]** 后方交会法;测角误差;归化值计算

**[中图分类号]** P207

**[文献标识码]** B

**[文章编号]** 1007-3000(2010)04-4

在待定点上设站测角,简称待定点测角。在已知点上设站,角度误差  $\Delta\beta, m\beta$  影响待定点的横向位置  $\frac{\Delta\beta}{\rho}s, \frac{m\beta}{\rho}s$ , 其中  $s$  是测站点到待定点的距离,  $\frac{\Delta\beta}{\rho}, \frac{m\beta}{\rho}$  表示将度、分、秒表示的角度值化为弧度。距离测量不区分测站和待定点,其误差  $\Delta_s, m_s$  影响待定点的纵向位置  $\Delta_s, m_s$ 。在待定点上设站测角时,角度误差的影响规律又是怎样的呢?本文对此进行讨论并给出其应用。

## 1 角度后方交会中的真误差关系

下面,我们首先对待定点测角中的微分几何关系进行分析,并由此得出真误差关系式。

在待定点测角中,设角度  $\gamma$  变大  $\Delta\gamma$ , 考察待定点  $P$  与已知点  $A, B$  的外接圆,可知,其半径  $R = \frac{S_{AB}}{2\sin\gamma}$  减小,

$\Delta_R = \frac{S_{AB} \cos\gamma \Delta\gamma}{2\sin^2\gamma} \frac{\Delta\gamma}{\rho}$  圆中心到  $AB$  距离  $h = \frac{1}{2} S_{AB} \cot\gamma$  减

小  $\Delta_h = \frac{S_{AB}}{2\sin^2\gamma} \frac{\Delta\gamma}{\rho}$ , 如图1所示。

在  $P$  点的圆切线的内移

$$\varepsilon_r = R + \Delta_h \cos \angle OO'P' - R' = \Delta_h \cos \angle OO'P' + \Delta_R$$

反映了  $\Delta_r$  对点  $P$  的影响

因为

$$\angle OO'P' = 180^\circ - \gamma' - \angle P'O'B = 180^\circ - \gamma' - 2\alpha'$$

所以

$$\varepsilon_r = -\Delta_h \cos(\gamma' + 2\alpha') + \Delta_R$$

$$= -\frac{S_{AB}}{2\sin^2\gamma} \frac{\Delta\gamma}{\rho} \cos(\gamma' + 2\alpha') + \frac{S_{AB} \cos\gamma \Delta\gamma}{2\sin^2\gamma} \frac{\Delta\gamma}{\rho}$$

$$= (\cos\gamma - \cos(\gamma' + 2\alpha')) \frac{S_{AB}}{2\sin^2\gamma} \frac{\Delta\gamma}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma, \alpha' = \alpha \\ &= 2\sin\alpha \sin(\alpha + \gamma) \frac{S_{AB}}{2\sin^2\gamma} \frac{\Delta\gamma}{\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sin\alpha \sin\beta \frac{S_{AB}}{\sin^2\gamma} \frac{\Delta\gamma}{\rho} \\ &= \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma \sin\gamma} S_{AB} \frac{\Delta\gamma}{\rho} \\ &= \frac{S_{PB}}{S_{AB}} \frac{S_{PA}}{S_{AB}} S_{AB} \frac{\Delta\gamma}{\rho} \\ &= \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB}} \frac{\Delta\gamma}{\rho} \end{aligned}$$

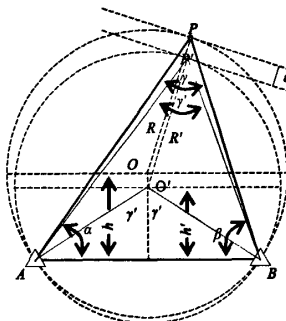


图1 待定点测角中微分几何关系分析

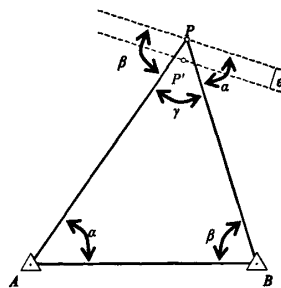


图2 待定点测角中真误差关系

上式实际上即待定点测角真误差对定点位置的影响,将几何关系重新表示在图2中,公式也重写下

**[收稿日期]** 2010-04-12

**[作者简介]** 许云燕,(1976—),女,汉族,河南新乡人,中级讲师,从事教学工作。

$$\varepsilon = \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB}} \frac{\Delta_\gamma}{\rho} \quad (1)$$

以上分析表明,在待定点  $P$  上测角,测角真误差对待定点  $P$  的影响可这样确定:在待定点  $P$  作  $PAB$  外接圆的切线,待定点  $P$  被影响到该切线内退?的平行线上,但在平行线上的具体位置不能确定。该结论可用于测量工程的许多问题,下面举例说明。

式(1)中误差形式为

$$m_P = \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB}} \frac{m_\gamma}{\rho} \quad (2)$$

## 2 侧方交会法定点误差分析

如图 3(a)所示,  $A, B$  为已知点,  $P$  为待定点,在  $A$  测水平角  $\alpha$ ,在  $P$  测水平角  $\gamma$ ,测角中误差为  $m_\beta$ ,现在分析  $P$  的点位误差。

根据前述分析,结合图 3(b),可知  $\Delta_\gamma$  对点  $P$  点位的单独影响为

$$\Delta_P^\gamma = \frac{\varepsilon}{\sin \beta} = \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB} \sin \beta} \frac{\Delta_\gamma}{\rho} \quad (3)$$

从而,中误差关系为

$$\frac{\gamma}{m_P} = \frac{\varepsilon}{\sin \beta} = \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB} \sin \beta} \frac{m_\gamma}{\rho} \quad (4)$$

由图 3(c),令

$$\delta_\alpha = S_{PA} \frac{\Delta_\alpha}{\rho} \quad (5)$$

可知  $\Delta_\alpha$  对点  $P$  点位的单独影响为

$$\Delta_P^\alpha = \frac{\delta_\alpha}{\sin \beta} = \frac{S_{PA}}{\sin \beta} \frac{\Delta_\alpha}{\rho} \quad (6)$$

相应地,真误差关系为

$$\frac{\alpha}{m_P} = \frac{S_{PA}}{\sin \beta} \frac{m_\alpha}{\rho} \quad (7)$$

因此,根据误差分析的分解合成法,得点  $P$  的点位误差为

$$m_P = \pm \sqrt{(\gamma_{m_P})^2 + (\alpha_{m_P})^2} = \pm \sqrt{\left( \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB} \sin \beta} \frac{m_\gamma}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{S_{PA}}{\sin \beta} \frac{m_\alpha}{\rho} \right)^2} \stackrel{\text{令 } m_\alpha = m_\gamma}{=} \frac{S_{PA}}{\sin \beta} \cdot \frac{m_\beta}{\rho} \sqrt{\left( \frac{S_{PB}}{S_{AB}} \right)^2 + 1} \quad (8)$$

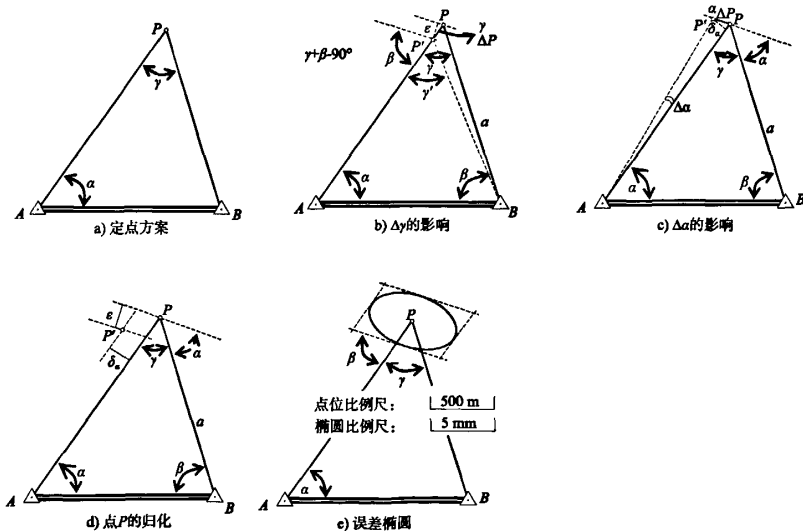


图 3 侧方交会定点及其误差分析

侧方交会法不能用于直接法放样,但可用于归化法放样。若将  $\Delta_\gamma, \Delta_\alpha$  看作是角差,则点  $P$  的归化图如图 3(d)所示。

在距  $PA$  线  $\frac{m_\alpha}{\rho} S_{AP}$  作  $PA$  的两条平行线,依  $PB, \alpha$  (或  $PA, \beta$ ) 在点  $P$  处作切线,在切线两侧距切线  $\frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB}} \frac{m_\gamma}{\rho}$  处作切线的两平行线,四条线所形成的平行四边形的内切椭圆即点  $P$  的误差椭圆,如图 3(e)所示。

## 3 距离、角度侧方交会法

如图 4(a)所示,  $A, B$  为已知点,  $P$  为待定点,在  $P$  测

水平角  $\gamma$ ,测  $B, P$  间距  $a$ ,设测角中误差为  $m_\beta$ ,测距中误差为  $m_a$ ,现在分析  $P$  的点位误差。

仿上例,由图 4(b),知,

$$\Delta_P^\gamma = \frac{\varepsilon}{\sin(\gamma + \beta - 90^\circ)} = \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB} \cos \alpha (\gamma + \beta)} \frac{\Delta_\gamma}{\rho} = \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB} \cos \alpha} \frac{\Delta_\gamma}{\rho}$$

所以

$$\frac{\gamma}{m_P} = \frac{S_{PA} S_{PB}}{S_{AB} \cos \alpha} \frac{m_\gamma}{\rho}$$

又由图 4(c)知  $\Delta_P^\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\cos \alpha}$

所以  $\frac{a}{m_P} = \frac{m_a}{\cos \alpha}$

故

$$m_P = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{m_P}\right)^2 + \left(\frac{a}{m_P}\right)^2} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\left(\frac{S_{PB} S_{PB}}{S_{AB}} \frac{m_y}{\rho}\right)^2 + m_a^2} \quad (9)$$

距离、角度交会法也不能用于直接法放样,但可用于归化法放样。若将  $\Delta\gamma$ 、 $\Delta\alpha$  看作是角差、距离差,则点  $P$  的归化图如图 4(d) 所示。

依  $PB$ 、 $\alpha$  (或  $PA$ 、 $\beta$ ) 在点  $P$  处作切线,在切线两侧

距切线  $\frac{S_{PB} S_{PB}}{S_{AB}} \frac{m_y}{\rho}$  处作切线的两平行线,在  $PB$  及其延长线上距  $P$  点处  $m_a$  作  $PB$  的两条垂线,四条线所形成的平行四边形的内切椭圆即点  $P$  的误差椭圆,如图 4(e) 所示。

#### 4 角度后方交会法

如图 5(a) 所示,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为已知点,在待定点  $P$  上对已知点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  分别观测了两个水平角  $\alpha$ 、 $\beta$ , 设测角误差为  $m_\beta$ , 现在分析  $P$  的点误差。

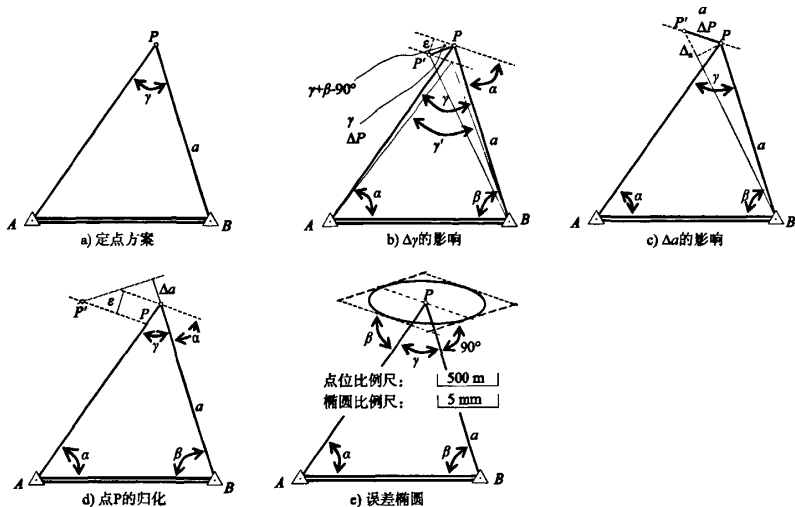


图 4 距离、角度侧方交会定点及其误差分析

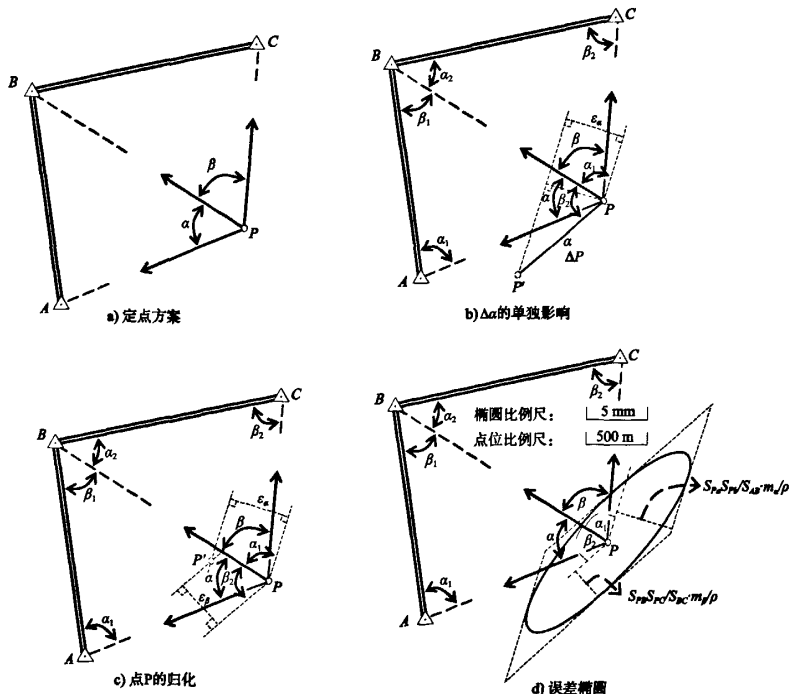


图 5 后方交会法定点及其误差分析

仿上例,由图 5(b),知

$$\Delta p = \frac{\varepsilon_a}{\sin(\beta_2 + \alpha_1 - 90^\circ)} = \frac{1}{\sin(\beta_2 + \alpha_1)} \cdot \frac{S_{PB} S_{PB}}{S_{AB}} \cdot \frac{\Delta_a}{\rho}$$

所以

$$m_p^a = \frac{1}{\sin(\beta_2 + \alpha_1)} \cdot \frac{S_{PB} S_{PB}}{S_{AB}} \cdot \frac{m_a}{\rho}$$

同理可得

$$m_p^b = \frac{1}{\sin(\beta_2 + \alpha_1)} \cdot \frac{S_{PB} S_{PB}}{S_{BC}} \cdot \frac{m_b}{\rho}$$

再假定测角精度相同,即  $m_a = m_b$ ,则得角度后方交会定点的点位误差

$$m_p = \frac{S_{PB}}{\sin(\beta_2 + \alpha_1)} \sqrt{\frac{S_{PB}^2}{S_{AB}^2} + \frac{S_{PB}^2}{S_{BC}^2}} \cdot \frac{m_a}{\rho}$$

或写成

$$m_p = \frac{S_{PB}}{\sin(\beta + \alpha + \angle CBA)} \sqrt{\frac{S_{PB}^2}{S_{AB}^2} + \frac{S_{PB}^2}{S_{BC}^2}} \cdot \frac{m_a}{\rho} \quad (10)$$

称后方交会的 Helmert 点位误差公式。从上式可以看出,当四点位于一圆周上时,  $\alpha + \beta + \angle CBA = 180^\circ$ ,分母为 0,误差为无穷,即所谓的危险圆。

角度后方交会法同样也不能用于直接法放样,但可用于归化法放样。若将  $\Delta_a, \Delta_b$  看作是角差,则点 P

的归化图如图 5(c)所示。

依  $PB, \alpha_1$  (或  $PA, \beta_1$ ) 在点 P 处作切线,在切线两侧距切线  $\frac{S_{PB} S_{PB}}{S_{AB}} \cdot \frac{m_a}{\rho}$  处作切线的两平行线,依  $PA, \beta_2$  (或  $PB, \alpha_2$ ) 在点 P 处作切线,在切线两侧距切线  $\frac{S_{PB} S_{PB}}{S_{BC}} \cdot \frac{m_b}{\rho}$  处作切线的两平行线,四条线所形成的平行四边形的内切椭圆即点 P 的误差椭圆,如图 5(d)所示。

本文给出了待定点测角对点位的误差影响,包括影响大小和方向,并简单展示了其应用价值,它极好地解决了角度侧、后方交会放样的归化值计算问题;它使角度侧、后方交会定点误差分析变得简洁明快。实际上,它的用途和优点还可进一步总结。

### 参考文献

- [1] 孙现申.误差分析的分解合成法[J].北京:测量员,1995(3):13-16
- [2] 孙现申,赵泽平.应用测量学[M].北京:解放军出版社,2004:9

## Influence Law and Application of Point Position Caused by Angular Measurement Errors of the Unknown Points

XU Yun-yan

(Zhengzhou Technical School For Surveying and Mapping, Henan Zhengzhou 450015)

**Abstract:** This paper analyzes Influence Law and Application of Point Position Caused By Angular Measurement Errors when angle measuring on the Unknown Points, including the size and orientation of angle. Through the application of angular side intersection and angle Resection method, It Preliminary shows its advantage in error analysis and calculation of the value of Planning to correct.

**Key words:** resection; error of angular measurment; caculation of reduction value

(上接第 73 页)

报,第 27 卷第 1 期,2004 年 3 月,16-18

[3] 邓曙光,李婉.曲线光滑的张力样条插值法 VC 实现

[J].工程地球物理学报,第 2 卷第 5 期,2005 年 10 月,387-390

## The Research of Method Making Illogical Sharp Angles to Become Blunt during the Smoothing Contour-line Process

HAN Guang-shun, GUO Jin-li

(Beijing Institute of Surveying and Mapping, Beijing 100038)

**Abstract:** During the smoothing contour-line process, there are illogical sharp angles which influence drawing purpose. The method is put forward for blunting the illogical sharp angles in this paper, when the illogical sharp angles are blunted, the contour-line is smoother and the drawing purpose is finer. The experimentation makes out the method can keep basic shape and make illogical sharp angles to become blunt of contour-line during the blunting illogical sharps, it has value of popularization usage because of meeting the production require.

**Key words:** contour-line; smooth; illogical sharp angles; to become blunt