路线缓和复曲线测量检验的弧长新方法与效果

张坤宜，张荣辉，禹智涛
（广东工业大学 建设学院，广东 广州 510090）

Arc-length Equation of the Middle Spiral Curve in Highway Surveying: Theory and Effect

ZHANG Kun-yi，ZHANG Rong-hui，YU Zhi-tao

摘要 说明路线设计与测量技术上缓和复曲线悬而未决的问题，介绍中插缓和曲线相对坐标系中的角度关系，根据曲线的密切特征分析圆心相对坐标表达式，推证求解中插缓和曲线弧长 l_M 方程，说明弧长方程应用于路线工程测量检验的几点结论。

关键词 路线测量 缓和复曲线 弧长原理 迭代法

一、概　述

缓和复曲线（或称卵形曲线）是一种由多种曲率半径的圆曲线和缓和曲线组成的复杂曲线，一般有双旁插、单旁插、无旁插等线型。图 1 是一条标准型缓和复曲线，含左旁插缓和曲线（l_{s_1}）、圆曲线（R_1，l_{y_1}）、中插缓和曲线（l_{s_3}）、圆曲线（R_2，l_{y_2}）、右旁插缓和曲线（l_{s_2}）。中插缓和曲线弧长 l_{s_3} 在路线测量与检验中备受关注。

现有中插缓和曲线弧长 l_{s_3} 主要以 $Rl = A^2$ 模式为基础，多以预先估计参数 A 值[1]的思路，解决办法有查表法、几何法、解析法等。不论路线测量、路线设计，类似的研究众说纷纭，但存在约定参数多、调试频繁、计算复杂、反复性突出等共同缺点[2]。弧长研究中的圆弧距法[3]没有采用预先设定 A 值的思路，提出以圆弧距研究弧长的方法，给出中插缓和曲线 l_{s_3} 弧长的求解公式。但该法存在公式误差和主点位置不定的缺点，尤其在 R_1 与 R_2 相差悬殊时，连接误差比较突出（见表 2）。样条法[2]设定参数多，附加条件较严，模拟结果近似。拟合方法可得精确结果并可用于工程实际[4]，但公式误差问题未完全解决。现有资料可见，缓和复曲线存在的突出问题是：缓和复曲线线形复杂，规律性不易被人们所认识；其中的中插缓和曲线弧长 l_{s_3} 和主点 F，w，M 定位等重要关系悬而未决，也是现代交通路线测量与检验值得关注的问题。

本文试图着眼于缓和复曲线的全局，从圆曲线的曲率中心坐标及其相对关系出发，在原理上说明中插缓和曲线弧长新模式及应用效果。为此在图 1 中建立 3 个坐标系，其中以 C 点为原点的 xCy 坐标系称绝对坐标系统，以 o 点为原点的 $x'oy'$ 坐标系和以 D 点为原点的 $x''Dy''$ 坐标系称相对坐标系。

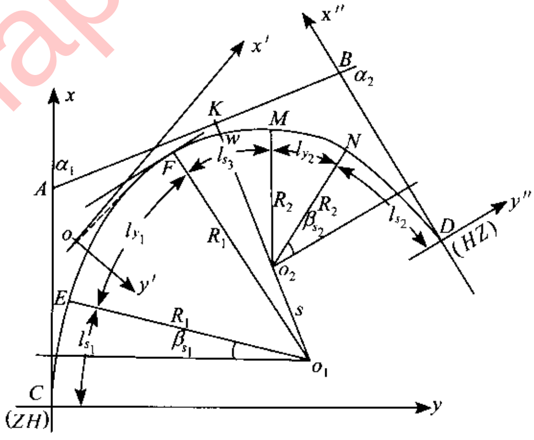

图 1

二、中插缓和曲线曲率半径的相对角度关系

图 2 是圆曲线和中插缓和曲线一起从图 1 取出的图形，其中 F，M 是圆曲线 EF，MN 和中插缓和曲线 FM 的密切点。设密切点 F，M 到中插缓和曲线起点 o 的弧长 l_F，l_M 和曲率半径 R_1，R_2 已知，则在 $x'oy'$ 相对坐标系中可见中插缓和曲线的相对角度关系。

1. 密切点 F，M 处的切线角

根据缓和曲线的特征，密切点 F，M 处的切线角可表示为

收稿日期：2004-05-21
作者简介：张坤宜（1944-），男，广东汕尾人，教授，主要从事测绘工程与路桥工程测量教学与研究。

$$\beta_M = \frac{l_M}{2R_2} \tag{1}$$

$$\beta_F = \frac{l_F^2}{2R_2 l_M} \tag{2}$$

根据缓和曲线性质，弧长 l_F，l_M 与密切点 F，M 处的曲率半径 R_1，R_2 满足参数 A^2，即

$$A^2 = R_1 l_F = R_2 l_M \tag{3}$$

顾及式(3)，式(2)可表示为

$$\beta_F = \frac{R_2 l_M}{2R_1^2} \tag{4}$$

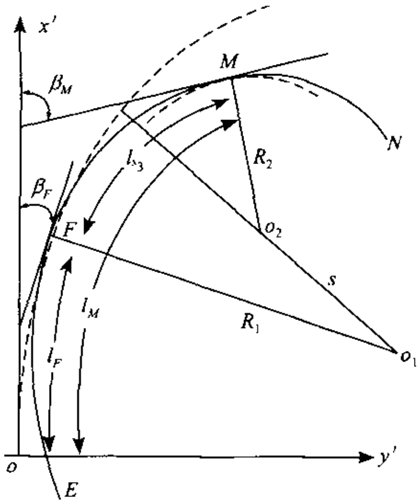

图 2

2.曲率半径相对方位角

根据密切点的性质[6]，不同曲率半径的空间曲线在密切点上具有密切特征，通过密切点的曲线曲率半径重合且相等，故 $Fo_1 = R_1$，$Mo_2 = R_2$，曲率半径的相对方位角 α_1，α_2 为

$$\alpha_1 = \beta_F + \frac{\pi}{2} = \frac{R_2 l_M}{2R_1^2} + \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

$$\alpha_2 = \beta_M + \frac{\pi}{2} = \frac{l_M}{2R_2} + \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

三、曲率中心 o_1，o_2 的相对坐标

由图 2 可知圆曲线曲率半径相对方位角 α_1，α_2，不难理解圆曲线的曲率中心 o_1，o_2 在 $x'oy'$ 相对坐标系中的相对坐标可表示为

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_F' + R_1\cos\alpha_1 = x_F' - R_1\sin\left(\frac{R_2 l_M}{2R_1^2}\right) \\ y_1' &= y_F' + R_1\sin\alpha_1 = y_F' + R_1\cos\left(\frac{R_2 l_M}{2R_1^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= x_M' + R_2\cos\alpha_2 = x_M' - R_2\sin\left(\frac{l_M}{2R_2}\right) \\ y_2' &= y_M' + R_2\sin\alpha_2 = y_M' + R_2\cos\left(\frac{l_M}{2R_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中，x_F'，y_F'，x_M'，y_M' 分别是缓和曲线上 F，M 点在 $x'oy'$ 相对坐标系中的坐标，可表示为[5]

$$\left.\begin{aligned} x_F' &= \frac{R_2 l_M}{R_1} - \frac{R_2^3 l_M^3}{40R_1^5} + \frac{R_2^5 l_M^5}{3\ 456R_1^9} - \frac{R_2^7 l_M^7}{599\ 040R_1^{13}} \\ y_F' &= \frac{R_2^2 l_M^2}{6R_1^3} - \frac{R_2^4 l_M^4}{336R_1^7} + \frac{R_2^6 l_M^6}{42\ 240R_1^{11}} - \frac{R_2^8 l_M^8}{9\ 676\ 800R_1^{15}} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} x_M' &= l_M - \frac{l_M^3}{40R_2^2} + \frac{l_M^5}{3\ 456R_2^4} - \frac{l_M^7}{599\ 040R_2^6} \\ y_M' &= \frac{l_M^2}{6R_2} - \frac{l_M^4}{336R_2^3} + \frac{l_M^6}{42\ 240R_2^5} - \frac{l_M^8}{9\ 676\ 800R_2^7} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(7)、式(8)的正弦、余弦函数按正弦、余弦级数展开得

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{R_2 l_M}{2R_1^2}\right) &= \frac{R_2 l_M}{2R_1^2} - \frac{R_2^3 l_M^3}{48R_1^6} + \frac{R_2^5 l_M^5}{3\ 840R_1^{10}} - \frac{R_2^7 l_M^7}{645\ 120R_1^{14}} \\ \cos\left(\frac{R_2 l_M}{2R_1^2}\right) &= 1 - \frac{R_2^2 l_M^2}{8R_1^4} + \frac{R_2^4 l_M^4}{384R_1^8} - \frac{R_2^6 l_M^6}{46\ 080R_1^{12}} + \frac{R_2^8 l_M^8}{10\ 321\ 920R_1^{16}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{l_M}{2R_2}\right) &= \frac{l_M}{2R_2} - \frac{l_M^3}{48R_2^3} + \frac{l_M^5}{3\ 840R_2^5} - \frac{l_M^7}{645\ 120R_2^7} \\ \cos\left(\frac{l_M}{2R_2}\right) &= 1 - \frac{l_M^2}{8R_2^2} + \frac{l_M^4}{384R_2^4} - \frac{l_M^6}{46\ 080R_2^6} + \frac{l_M^8}{10\ 321\ 920R_2^8} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

将式(9)、式(10)、式(11)、式(12)代入式(7)、式(8)，可整理为

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{R_2 l_M}{AR_1} - \frac{R_2^3 l_M^3}{BR_1^5} + \frac{R_2^5 l_M^5}{CR_1^9} - \frac{R_2^7 l_M^7}{DR_1^{13}} \\ y_1' &= \frac{R_2^2 l_M^2}{ER_1^3} - \frac{R_2^4 l_M^4}{FR_1^7} + \frac{R_2^6 l_M^6}{GR_1^{11}} - \frac{R_2^8 l_M^8}{HR_1^{15}} + R_1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= \frac{l_M}{A} - \frac{l_M^3}{BR_2^2} + \frac{l_M^5}{CR_2^4} - \frac{l_M^7}{DR_2^6} \\ y_2' &= \frac{l_M^2}{ER_2} - \frac{l_M^4}{FR_2^3} + \frac{l_M^6}{GR_2^5} - \frac{l_M^8}{HR_2^7} + R_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式(13)、式(14)就是 o_1，o_2 相对坐标表达式，式中 $A = 2$，$B = 240$，$C = 34\ 560$，$D = 8\ 386\ 560$，$E = 24$，$F = 2\ 688$，$G = 506\ 880$，$H = 154\ 828\ 800$。

四、中插缓和曲线弧长 l_M 方程

由图 2 可见，若弧长 l_M 可得，曲率半径 R_1, R_2 已知，则按式(3)可求弧长 l_F，弧长 l_{s_3} 可按 $l_M - l_F$ 得到。因此弧长 l_M 是推演弧长方程的关键。

在图 1 的 xCy 绝对坐标系统与 $x'oy'$ 相对坐标系统中，曲率中心(圆心) o_1, o_2 坐标与圆心距 s 存在两种固定的关系，即

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = s^2 \tag{15}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = s^2 \tag{16}$$

一般地 R_1, R_2 可知，但式(15)中，圆心 o_1, o_2 的相对坐标 x_1', y_1', x_2', y_2' 因弧长 l_M 未知无法求得，则圆心距 s 无法得到。在式(16)中，圆心 o_1, o_2 的绝对坐标 x_1, y_1, x_2, y_2 可按图 1 左、右旁插缓和曲线原理在 xCy，$x''Dy''$ 坐标系中求知[4]，则圆心距 s 可得到，s 便是实地可知的基准长度。显然式(15) o_1, o_2 相对坐标能够与实地基准长度 s 形成固定关系的表达式，即式(13)、式(14)由 l_M, R_1, R_2 确定的圆心 o_1, o_2 相对坐标与实地基准长度 s 形成固定的关系，即所谓的‘曲率中心重合关系’[7]。由这种关系可推求中插缓和曲线 l_M 的弧长方程为

$$k_1 w + k_2 w^2 + k_3 w^3 + k_4 w^4 + k_5 w^5 + k_6 w^6 + k_7 w^7 + k_8 w^8 + K = 0 \tag{17}$$

式(17)中，w 是决定弧长 l_M 的未知数；K 是已知常数，即

$$w = l_M^2 \tag{18}$$

$$K = (R_1 - R_2)^2 - s^2 \tag{19}$$

从上述推证中可见，弧长方程式(17)中系数 $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8$ 与圆曲线半径 R_1, R_2 存在明确的关系，即

$$k_1 = \frac{1}{A^2}\left(1 - \frac{2R_2}{R_1} + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right) + \frac{2}{E}\left(1 - \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2^3}{R_1^3} + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)$$

$$k_2 = -\frac{2}{AB}\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{R_2^3}{R_1^5} - \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{R_2^5}{R_1^6}\right) + \frac{1}{E^2}\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{2R_2}{R_1^3} + \frac{R_2^4}{R_1^6}\right) - \frac{2}{F}\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{R_1}{R_2^3} - \frac{R_2^3}{R_1^7} + \frac{R_2^4}{R_1^6}\right)$$

$$k_3 = \frac{2}{AC}\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{R_2^5}{R_1^9} - \frac{1}{R_1 R_2^3} + \frac{R_2^6}{R_1^{10}}\right) + \frac{1}{B^2}\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{2R_2}{R_1^5} + \frac{R_2^6}{R_1^{10}}\right) - \frac{2}{EF}\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{R_2^3}{R_1^7} - \frac{1}{R_1^3 R_2} + \frac{R_2^6}{R_1^{10}}\right) + \frac{2}{G}\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{R_1}{R_1^5} - \frac{R_2^7}{R_1^{11}} + \frac{R_2^6}{R_1^{10}}\right)$$

$$k_4 = -\frac{2}{AD}\left(\frac{1}{R_2^6} - \frac{R_2^7}{R_1^{13}} - \frac{1}{R_1 R_2^5} + \frac{R_2^8}{R_1^{14}}\right) - \frac{2}{BC}\left(\frac{1}{R_2^6} - \frac{R_2^5}{R_1^{14}} - \frac{1}{R_1^5 R_2} + \frac{R_2^8}{R_1^{14}}\right) + \frac{2}{EG}\left(\frac{1}{R_2^6} - \frac{R_2^5}{R_1^{11}} - \frac{1}{R_1^3 R_2^3} + \frac{R_2^8}{R_1^{14}}\right) + \frac{1}{F^2}\left(\frac{1}{R_2^6} - \frac{2R_2}{R_1^7} + \frac{R_2^8}{R_1^{14}}\right) - \frac{2}{H}\left(\frac{1}{R_2^6} - \frac{R_1}{R_2^7} - \frac{R_2^9}{R_1^{15}} + \frac{R_2^8}{R_1^{14}}\right)$$

$$k_5 = \frac{2}{BD}\left(\frac{1}{R_2^8} - \frac{R_2^5}{R_1^{13}} - \frac{1}{R_1^5 R_2^3} + \frac{R_2^{10}}{R_1^{18}}\right) + \frac{1}{C^2}\left(\frac{1}{R_2^8} - \frac{2R_2}{R_1^9} + \frac{R_2^{10}}{R_1^{18}}\right) - \frac{2}{EH}\left(\frac{1}{R_2^8} - \frac{R_2^7}{R_1^{15}} - \frac{1}{R_1^3 R_2^5} + \frac{R_2^{19}}{R_1^{18}}\right) - \frac{2}{FG}\left(\frac{1}{R_2^8} - \frac{R_2^3}{R_1^{11}} - \frac{1}{R_1^7 R_2} + \frac{R_2^{10}}{R_1^{18}}\right)$$

$$k_6 = -\frac{2}{CD}\left(\frac{1}{R_2^8} - \frac{R_2^3}{R_1^{13}} - \frac{1}{R_1^9 R_2} + \frac{R_2^{12}}{R_1^{22}}\right) + \frac{2}{FH}\left(\frac{1}{R_2^{10}} - \frac{R_2^5}{R_1^{15}} - \frac{1}{R_1^7 R_2^3} + \frac{R_2^{12}}{R_1^{22}}\right) + \frac{1}{G^2}\left(\frac{1}{R_2^{10}} - \frac{2R_2}{R_1^{11}} + \frac{R_2^{12}}{R_1^{22}}\right)$$

$$k_7 = \frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{R_2^{12}} - \frac{2R_2}{R_1^{13}} + \frac{R_2^{14}}{R_1^{26}}\right) - \frac{2}{GH}\left(\frac{1}{R_2^{12}} - \frac{R_2^3}{R_1^{15}} - \frac{1}{R_1^{11} R_2} + \frac{R_2^{14}}{R_1^{26}}\right)$$

$$k_8 = \frac{1}{H^2}\left(\frac{1}{R_2^{14}} - \frac{2R_2}{R_1^{15}} + \frac{R_2^{16}}{R_1^{30}}\right)$$

各式中 A, B, C, D, E, F, G, H 与式(13)同。

五、弧长方程的求解方法

弧长方程式(17)是一个高次方程，只要圆曲线设计半径 R_1, R_2 和圆心距 s 已知，就可按迭代法准确求得弧长值 l_M, l_F, l_{s_3}。迭代法求解弧长 l_M 的方法如下。

1. 利用设计半径 R_1, R_2 计算 $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8$ 各系数；

2. 按式(19)求 K；

3. 初求 w，即

$$w = -\frac{K}{k_1}; \tag{20}$$

4. 求 dw，将 w, K 及 $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8$ 各系数代入式(17)，即

$$dw = k_1 w + k_2 w^2 + k_3 w^3 + k_4 w^4 + k_5 w^5 + k_6 w^6 + k_7 w^7 + k_8 w^8 + K; \tag{21}$$

5. 限制误差 Q 设定(实例 $Q = 0.000\ 000\ 000\ 1$),若 $dw \geqslant Q$ 时,再计算 w,即

$$w = w - \frac{dw}{A}; \tag{22}$$

6. 按式(21)计算 dw,按式(22)计算 w,直至按式(19)计算 $dw \leqslant Q$ 时,则计算 $\sqrt{w}$ 得 l_M。

六、试验与体会

1. 弧长方程系数 $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8$ 主要决定于圆曲线半径 R_1, R_2,而 K 值取决于圆曲线半径 R_1, R_2 和圆心距 s。或者说,弧长 l_M 取决于圆曲线半径 R_1, R_2 和圆心距 s。实例的系数列于表 1。若 $K = 0$,中插缓和曲线弧长 $l_M = 0$。弧长方程的 $K > 0$,弧长 l_M 有解。按迭代法一次性精确求得的中插缓和曲线弧长 l_M, l_F, l_{s_3} 和缓和复曲线的方位关系(另文讨论),构成缓和复曲线完整的结构参数。表 2 列出以结构参数试验实例 2,3,4,5 的连接误差很小,说明弧长方程完全满足现代交通路线高精度测量检验的需要。

表 1

实例参数	R_1:2 300 m	R_2:60 m	圆心距 s:2 231.004 9 m	K:40 217.136 18
	k_1:−2.873 929 226	k_2:7.071 071 189 7e−6	k_3:−1.024 431 8374e−11	k_4:9.169 280 905e−18
	k_5:−1.043 202 997e−24	k_6:2.972 563 987e−30	k_7:−5.175 770 75e−36	k_8:5.323 276 285e−42

表 2　　单位:m

实　例		1(圆弧距法)	2(设计)	3(试验)	4(试验)	5(参考例)
已知半径	R_1	2 300	2 300	2 300	2 300	6 100
	R_2	60	60	60	60	4 500
基准长度	s	2 231.004 9	2 231.004 9	2 231.890	2 235.901	1 598.672 4
圆弧距[7]	Δp	8.995	8.995	8.109	4.099	1.327 6
弧长	l_M	118.414	120.417 5	114.143 8	80.542 4	2 819.161 5
	l_F	3.089	3.141 3	2.977 7	2.101 1	2 079.709 3
	l_{s_3}	115.325	117.276 2	111.166 1	78.441 4	739.452 2
连接误差	Δs	±0.286	±0.001 28	±0.000 80	±0.000 05	±0.000 05

2. 缓和复曲线中插缓和曲线弧长的一次性求解,避免参数预估环节和多种辅助参数的参与,不受传统思路的限制,计算方法简捷。一般情况下弧长方程一次性求解得到的曲线终点 M 检验连接误差[4]几乎为零,即使半径比很大,如表 2 实例 $2R_1 : R_2 > 38$,缓和复曲线连接误差最大 ±0.001 28 m。试验表明,弧长方程求解不再有调试频繁、反复性突出和连接误差大等弊病。在缓和复曲线测量检验中,中插缓和曲线弧长的求解效率高。

3. 上述试验效果是弧长方程式(17)的推演符合缓和曲线性质的反映。方程式(17)借助于绝对坐标系中的基准长度 s 实现相对坐标系弧长 l_{s_3} 的一次性精确求解。或者说,只要圆曲线半径 R_1, R_2 和圆心距 s(或者说曲率中心 o_1, o_2)确定,弧长方程则可准确得到中插缓和曲线弧长值。因此 l_M 弧长方程是缓和复曲线测量坐标检验的重要方程,并且该方程可应用于路线设计。

参考文献:

[1] 日本道路协会.回旋曲线手册[M].北京:人民交通出版社,1980.

[2] 王伯惠.道路立交工程(第 1 版)[M].北京:人民交通出版社,2000.132-159.

[3] 张作容.复曲线中间缓和曲线插法通解[J].公路,1991,(3):10-13.

[4] 张坤宜,等.公路卵形曲线的测量坐标检验[J].测绘通报,2004,(4):39-42.

[5] 张坤宜,覃　辉,金向农.交通土木工程测量(修订版)[M].武汉:武汉大学出版社,2003.310-322.

[6] 武汉测绘科技大学,同济大学测量教研室.控制测量学(下册)[M].北京:测绘出版社,1988.23-25.

[7] 张坤宜.同向缓和复曲线数学模型的探讨[J].公路,1999,(9):21-26.